6. SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

6.1. SUCESIONES NUMÉRICAS

6.1.1. Sucesiones de números reales

Se llama **sucesión** de números reales a cualquier lista ordenada de números reales:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

que se suele representar por $\{a_n\}$. Una sucesión se puede interpretar también como una aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow a_n \end{aligned}$$

donde la expresión, si existe, de cada término en función del lugar que ocupa, $a_n = f(n)$, se llama **término general** de la sucesión.

6.1.2. Ejemplos

1. $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$ es una sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n}$.

2. $2,\ -4,\ 6,\ -8,\ 10,\ -12,\ \ldots$ es una sucesión de término general $a_n = -2(-1)^n n$.

3. $12,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \ldots$ es una sucesión de término general $a_n = \frac{12}{2^{n-1}} = 24 \cdot 2^{-n}$.

6.1.3. Límite de una sucesión

Intuitivamente, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene **límite** l (que puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$) si a_n tiende a l cuando n tiende a infinito, y se indica:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \qquad \text{ó} \qquad \lim_{n} a_n = l \qquad \text{ó} \qquad a_n \longrightarrow l$$

Formalmente:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} &\iff (\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \ \text{ tal que: } \ n > \nu \implies |a_n - l| < \varepsilon) \\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty &\iff (\forall M > 0\ \ \exists \nu \ \text{ tal que: } \ n > \nu \implies a_n > M) \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty &\iff (\forall M > 0\ \ \exists \nu \ \text{ tal que: } \ n > \nu \implies a_n < -M) \end{aligned}$$

En cualquier caso, como ocurría en el caso de límites de funciones, el límite de una sucesión, si existe, es único. También como allí, las sucesiones con límite cero se llaman **infinitésimos**.

6.1.4. Ejemplo

Encuentra, intuitiva y formalmente, los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **(b)** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ **(c)** $a_n = \dfrac{n^2}{1-n}$ **(d)** $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

6.1.5. Carácter de una sucesión

Según que exista o no el límite de una sucesión, y de su valor, se define su carácter:

- Se dice que una sucesión es **convergente** si tiene límite finito.

- Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **divergente** si la sucesión $\{|a_n|\}$ tiende a $+\infty$, es decir, si:

$$\forall M > 0 \ \exists \nu \ \text{ tal que: } \ n > \nu \implies |a_n| > M$$

  Son divergentes las sucesiones con límite $+\infty$ y con límite $-\infty$, pero también lo son ciertas sucesiones sin límite como, por ejemplo, la sucesión $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ donde los términos que ocupan lugares impares tienden a $+\infty$ y los que ocupan lugares pares tienden a $-\infty$.

- Se dice que una sucesión es **oscilante** cuando no es convergente ni divergente. Por ejemplo, la sucesión $1, -1, \ 1, -1, \ 1, -1, \ldots$ es oscilante.

6.1.6. Tipos de sucesiones y propiedades

- La sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Se dice que una sucesión es **monótona** cuando es monótona creciente o monótona decreciente.

El carácter y el tipo de las sucesiones están relacionados con las siguientes propiedades:

1. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

2. Toda sucesión monótona no acotada es divergente.

3. Toda sucesión convergente está acotada.

Observa que el recíproco de la tercera propiedad no es cierto, pues una sucesión acotada puede no ser convergente (por ejemplo: $1, -1, \ 1, -1, \ 1, -1, \ldots$).

6.1.7. Subsucesiones

Se llama **subsucesión** de la sucesión $\{a_n\}$ a cualquier sucesión $\{a_{n_k}\}$ donde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, es decir, cualquier sucesión formada por términos elegidos arbitrariamente pero en orden creciente de ubicación. Así, por ejemplo, son subsucesiones de la sucesión $1, 2, \ 3, 4, \ 5, 6, \ldots$ las siguientes.

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \qquad 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \qquad 3, 9, 27, 81, \ldots$$

pero no lo es la sucesión $3, 2, 9, 8, 27, 26, \ldots$, pues aunque todos sus términos están incluidos en ella, no lo están en el mismo orden.
Se verifican las siguientes propiedades:

- Toda subsucesión de una sucesión convergente (divergente) es una sucesión convergente (divergente) y el límite (si existe) es el mismo.
- Toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.
- Toda sucesión admite una subsucesión que es convergente o divergente.

Puesto que una sucesión oscilante contiene subsucesiones convergentes, tiene sentido definir los límites de estas como **límites de oscilación** de la primera. Así, por ejemplo, 1, -1 y $+\infty$ son límites de oscilación de la sucesión $1, -1, 1, 1, -1, 2, 1, -1, 3, 1, -1, 4, 1, -1, 5, 1, -1, 6, \ldots$.

6.1.8. Límites de operaciones con sucesiones

Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ y $\{b_n\} \longrightarrow b$, entonces:

$$a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b \qquad a_n b_n \longrightarrow ab \qquad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b} \ (\text{si } b \neq 0) \qquad a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$$

siempre que no se presente alguna de las siguientes **indeterminaciones**:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

que, en cada caso, habrá que resolver mediante técnicas adecuadas de cálculo de límites.

6.1.9. Límites de sucesiones como límites de funciones

Si $a_n = f(n)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{n} a_n = l$.

Este resultado permite usar en el cálculo de límites de sucesiones las técnicas empleadas para el cálculo de límites de funciones, incluso la regla de L'Hôpital.

6.1.10. Ejemplos

Halla el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **(c)** $a_n = \sqrt[n]{n}$

(b) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ **(d)** $a_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2n+1}$ **(e)** $a_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots}$

6.1.11. Sucesiones equivalentes

Se dice que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **sucesiones equivalentes** si el límite de su cociente es la unidad:

$$\{a_n\} \text{ y } \{b_n\} \text{ son } \textbf{sucesiones equivalentes} \iff \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

y se indica: $a_n \sim b_n$. Es fácil comprobar, hallando los límites pertinentes, que las siguientes sucesiones son equivalentes:

- Si $a_n \to 0$, son equivalentes:

$$\sin a_n \sim a_n \sim \arcsin a_n \qquad (1+a_n)^p \sim 1 + p a_n \qquad \ln(1+a_n) \sim a_n$$

$$\tan a_n \sim a_n \sim \arctan a_n \qquad 1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2} \qquad e^{a_n} - 1 \sim a_n$$

- Si $a_n \to 1$, son equivalentes:

$$\ln a_n \sim a_n - 1 \qquad \text{y, sustituyendo } a_n = \sqrt[n]{a}\ (a>0), \qquad \sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln a$$

- **Fórmula de Stirling**:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

En el cálculo de límites, en productos y cocientes se pueden sustituir sucesiones por otras equivalentes.

6.1.12. Ejemplo

Calcula, usando sucesiones equivalentes, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_n n \sin \dfrac{1}{n}$ **(b)** $\lim\limits_n n^2 \left(e^{1/n} - 1\right)$ **(c)** $\lim\limits_n \dfrac{2^n}{n!}$ **(d)** $\lim\limits_n \dfrac{n^n}{n!}$

6.1.13. Infinitos. Órdenes de magnitud

Se dice que una sucesión es un **infinito** si es divergente, es decir, si el límite de su valor absoluto es infinito:

$$\{a_n\} \text{ es un } \textbf{infinito} \iff \lim_n |a_n| = \infty$$

Dados dos infinitos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se dice que $\{b_n\}$ es un **infinito de orden superior** al de $\{a_n\}$ si:

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$$

y se representa por: $a_n \ll b_n$.

Es fácil comprobar, hallando los límites pertinentes, la siguiente jerarquía de infinitos:

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n \qquad (p > 0,\ a > 1)$$

En el cálculo de límites, se puede sustituir una suma o diferencia de infinitos por aquel que tiene jerarquía superior.

6.1.14. Ejemplo

Halla, usando la jerarquía de infinitos, el siguiente límite:

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^3+n^2}-(\ln n)^{13}}{n\sqrt{n+1}}$$

6.1.15. Dos teoremas sobre límites

- **Regla del sandwich:** El límite de una sucesión comprendida entre dos que tienen el mismo límite coincide con este, es decir:

$$\begin{cases} a_n \le b_n \le c_n \\ \lim_n a_n = \lim_n c_n = l \end{cases} \implies \lim_n b_n = l$$

- **Teorema:** El producto de una sucesión acotada por otra con límite cero también tiene límite cero, es decir:

$$\begin{cases} \{a_n\} \text{ acotada} \\ \lim_n b_n = 0 \end{cases} \implies \lim_n a_n b_n = 0$$

6.1.16. Ejemplos

Halla los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = \sin\dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \sin\dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \sin\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ **(b)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\sin\left[\left(\dfrac{n^3+3n^2+\ln n}{n!}\right)^n\right]$

6.1.17. Criterio de Stolz

Si $\{b_n\}$ es monótona divergente, o $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son infinitésimos con $\{b_n\}$ monótona, entonces

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

siempre que este último límite exista.

6.1.18. Ejemplo

Halla el siguiente límite: $\displaystyle\lim_n \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

6.1.19. Otros criterios

Como consecuencia del criterios de Stolz, se obtienen los siguientes criterios de convergencia:

- **Media aritmética:** Si $\lim_n a_n = l$, entonces $\displaystyle\lim_n \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = l$
- **Media geométrica:** Si $\lim_n a_n = l$ y $a_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = l$
- **Criterio de la raíz:**Si $\displaystyle\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ y $a_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

6.1.20. Ejemplos

Halla los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$ **(c)** $a_n = \sqrt[n]{n}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2}{n^2+1}}$ **(d)** $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}$

6.1.21. Sucesiones recurrentes

Se dice que $\{a_n\}$ es una **sucesión recurrente** cuando sus términos vienen definidos en función de los que le preceden. Son sucesiones recurrentes:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}\,, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{es la sucesión:} \quad 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}=2,\ \ldots$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad n > 2 \end{cases} \quad \text{es la sucesión:} \quad 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots \quad \textbf{(sucesión de Fibonacci)}$$

Para hallar el límite de sucesiones recurrentes es frecuente proceder como se indica a continuación:

1. Probar que la sucesión es monótona y acotada, de donde se deduce que tiene límite (6.1.6).

2. Tomar límites en la expresión de recurrencia y hallar el límite en la ecuación que se obtiene.

6.1.22. Ejemplo

Halla el límite de la sucesión recurrente: $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}\,, \quad n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

(a) $2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,\ \ldots$ **(b)** $2,\ 1,\ \dfrac{8}{9},\ 1,\ \dfrac{32}{25},\ \dfrac{64}{36},\ \ldots$ **(c)** $-1,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{-3}{5},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{-5}{9},\ \ldots$

2. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ **(d)** $\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$ **(g)** $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ **(i)** $\dfrac{\binom{n+k}{k}}{(n+k)^k}$

(b) $\sqrt{n^2+n}-n$ **(e)** $\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}$ **(h)** $\dfrac{\ln n^n}{\ln n!}$ **(j)** $\left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\ln(n+1)}}$

(c) $\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ **(f)** $n\left(1-\sqrt[3]{1-\dfrac{a}{n}}\right)$

3. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$ **(d)** $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)}{\ln n^2}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ **(e)** $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}$

(c) $\dfrac{1+2\sqrt{2}+\ldots+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

4. Prueba que existe el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$, y que su valor ℓ verifica que $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

5. Estudia la convergencia y calcula el límite, cuando exista, de cada una de las siguientes sucesiones recurrentes:

(a) $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\,a_n\,,\quad a_1 = 1$ **(b)** $a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}-1\,,\quad a_1 = a > 0$

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si una sucesión no es convergente, entonces es divergente.

(b) Toda sucesión divergente tiene límite.

(c) Toda sucesión divergente de términos negativos tiene límite.

(d) Toda sucesión acotada es convergente.

(e) El límite de una sucesión de números racionales es racional.

(f) Si dos sucesiones tienen el mismo límite, el límite de su cociente es 1.

(g) Si dos sucesiones tienen el mismo límite, el límite de su diferencia es 0.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

(a) $1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{3}{4},\ 1+\frac{7}{8},\ 1+\frac{15}{16},\ \ldots$ **(b)** $\frac{1}{4},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{16},\ \frac{4}{32},\ \frac{5}{64},\ \ldots$ **(c)** $\frac{1}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{9},\ \frac{9}{12},\ \frac{9}{15},\ \frac{13}{18},\ \ldots$

2. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\dfrac{n\left(\sqrt{n}+2n+1\right)}{n^2+3}$ **(d)** $n\ln\sqrt{\dfrac{n+a}{n-a}}$ **(g)** $\dfrac{(n!)^2 4^n}{(2n)!\sqrt{n}}$ **(i)** $\dbinom{2n}{n}4^{-n}\sqrt{n}$

(b) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n$ **(e)** $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$ **(h)** $\dfrac{2^n n!}{n^n}$ **(j)** $\left(\dfrac{(1+an)^2}{a^2n^2}\right)^n$

(c) $\left(\sqrt{\dfrac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{1+3n}{2n-1}}$ **(f)** $n\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n-1]{a}\right)$

3. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

(a) $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ **(c)** $\dfrac{1+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\ ,\quad p\in\mathbb{N}$

(b) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$ **(d)** $n\left(\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2$

4. Estudia la convergencia y calcula el límite, cuando exista, de cada una de las siguientes sucesiones recurrentes:

(a) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ ,\quad x_1=\sqrt{2}$ **(b)** $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}+x_n^2\ ,\quad x_1=a\in\mathbb{R}$