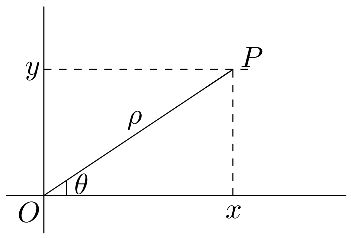
# 5. CURVAS PARAMÉTRICAS Y POLARES

## 5.2. CURVAS EN COORDENADAS POLARES

### 5.2.1. Coordenadas polares

Cada punto $P$ del plano distinto del origen queda unívocamente determinado por el segmento $OP$ que lo une al origen, llamado **radio vector**, que a su vez queda unívocamente determinado por su longitud $\rho > 0$ y por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ que forma con la parte positiva del eje de abscisas. El par $(\rho, \theta)$ se llaman **coordenadas polares** del punto $P$.




$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \theta) \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$(\rho, \theta) \longrightarrow (x, y) \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

### 5.2.2. Ecuación polar de una curva

En general, en coordenadas cartesianas los puntos $(x, y)$ de una curva se caracterizan por cumplir cierta relación que, en forma explícita, se expresa por $y = f(x)$. Cuando los puntos se expresan en coordenadas polares, la relación que se establece se llama **ecuación polar** de la curva y se suele expresar como $\rho = f(\theta)$, con $\theta \in D$.
En principio, debería ser $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho \geq 0$. Sin embargo, es posible considerar valores de $\theta$ fuera de ese intervalo (considerando sucesivas circunferencias) e incluso valores negativos de $\rho$. En este último caso, si $\rho < 0$ en la dirección $\theta$, el punto se dibuja a distancia $-\rho > 0$ sobre la semirrecta correspondiente a la dirección $\theta + \pi$.

### 5.2.3. Propiedades de tangencia

A partir de la ecuación polar de una curva se pueden obtener unas ecuaciones paramétricas:

$$\rho = f(\theta) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \alpha(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$$

Entonces, usando técnicas de curvas paramétricas:

- Vector tangente: $\alpha'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)$
- Recta tangente en un punto $(\theta_0, \rho_0)$ con $\rho_0 = f(\theta_0)$:

$$\frac{x - f(\theta_0)\cos\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)\sin\theta_0} = \frac{y - f(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0}$$

- Puntos con tangente horizontal: $f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta = 0$
- Puntos con tangente vertical: $f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta = 0$

Son también de interés los **puntos extremales**, que son aquellos puntos donde el radio vector es perpendicular al vector tangente, lo que sucede cuando $f'(\theta) = 0$.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** Pasa de coordenadas cartesianas a polares, o viceversa, cada una de las siguientes funciones:

**(a)** $x = 2$ **(b)** $x^2+(y-2)^2 = 4$ **(c)** $\rho \sin\theta = 4$ **(d)** $\rho = \sin\theta+\cos\theta$ **(e)** $\rho = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

**2.** Representa las siguientes curvas indicando el sentido en que se recorren:

**(a)** $\rho = 1 - \cos\theta$ **(b)** $\rho = 1 - 2\cos\theta$ **(c)** $\rho = \cos 2\theta$ **(d)** $\rho = 3\sin 3\theta$

**3.** Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto que se indica:

**(a)** $\rho = 4 - 2\sin\theta\ ,\ \ \theta = 0$ **(b)** $\rho = \dfrac{4}{5-\cos\theta}\ ,\ \ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

**4.** Determina los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva $\rho = 1 - \cos\theta$.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Pasa de coordenadas cartesianas a polares, o viceversa, cada una de las siguientes funciones:

**(a)** $x^2+y^2 = 9$ **(b)** $y = ax$ **(c)** $y = 3$ **(d)** $\rho\cos\theta = 4$ **(e)** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

**2.** Representa las siguientes curvas indicando el sentido en que se recorren:

**(a)** $\rho = 1 + 2\cos\theta$ **(b)** $\rho = 4\theta$ **(c)** $\rho = 2\sin 4\theta$ **(d)** $\rho^2 = 4\cos 2\theta$

**3.** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $\rho = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

**4.** Determina los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva $\rho^2 = 4\cos 2\theta$.