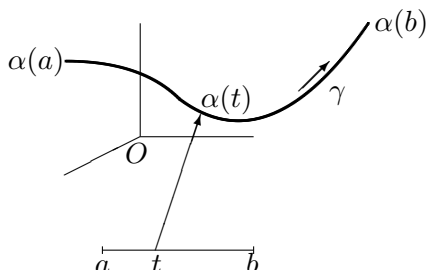


## 5. CURVAS PARAMÉTRICAS Y POLARES

### 5.1. CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

#### 5.1.1. Curvas en forma paramétrica

Se dice que  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  es una **curva** si existe una aplicación continua  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha([a, b]) = \gamma$ . La aplicación  $\alpha$  se llama **parametrización** de la curva.



- **Origen** de la curva:  $\alpha(a)$
- **Extremo** de la curva:  $\alpha(b)$
- **Sentido** de la curva: el que va de  $\alpha(a)$  a  $\alpha(b)$ .

Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  una curva parametrizada por  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Se dice que

- $\gamma$  es una **curva cerrada** cuando el origen y el extremo coinciden, es decir, si  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .
- $\gamma$  es una **curva simple** cuando la parametrización  $\alpha$  es inyectiva en  $[a, b]$  y en  $(a, b]$ , es decir, si  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$  cuando  $t_1 \neq t_2$  con  $t_1, t_2 \in [a, b]$  o con  $t_1, t_2 \in (a, b]$ .

La curva  $\gamma$  no es simple cuando existen **puntos múltiples**, es decir, cuando existen  $t_1, t_2 \in [a, b]$  o  $t_1, t_2 \in (a, b]$  tales que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  con  $t_1 \neq t_2$ . Intuitivamente, una curva no es simple cuando se corta a sí misma en un punto interior.

La definición de curva se extiende de modo natural al caso en que el intervalo de definición no es cerrado o acotado. En estos casos puede ocurrir que el origen y/o extremo no se alcancen.

#### 5.1.2. Algunas parametrizaciones de curvas

1. El segmento que va de  $P(x_1, y_1, z_1)$  a  $Q(x_2, y_2, z_2)$  es una curva en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1), z_1 + t(z_2 - z_1)) \end{aligned}$$

2. Una circunferencia en el plano es una curva cerrada. Dos parametrizaciones de la circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $r$  recorrida en sentido positivo (contrario a las agujas de reloj) son:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t) & t &\longrightarrow \beta(t) = (a + r \cos 2\pi t, b + r \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

y otra que la recorre en sentido negativo es:

$$\varphi(t) = (a + r \cos t, b - r \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

3. Una elipse en el plano es una curva cerrada. Una parametrización de la elipse  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  recorrida en sentido positivo es:

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

4. El grafo de una función continua  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  es una curva parametrizada, por ejemplo, por la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (t, f(t)) \end{aligned}$$

### 5.1.3. Curva contraria

Si  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  es una curva parametrizada por  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se llama **curva contraria** a la misma curva recorrida en sentido contrario. Se suele representar por  $-\gamma$ , y una parametrización suya es

$$\begin{aligned} \beta : [-b, -a] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \beta(t) = \alpha(-t) \end{aligned}$$

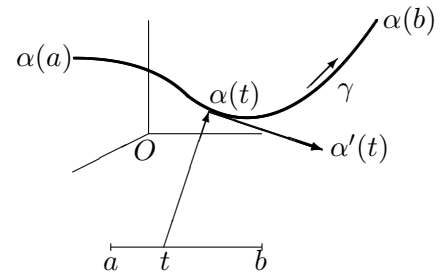
### 5.1.4. Curvas suaves

Una curva  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  se dice **curva suave** si admite una parametrización  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , derivable, siendo el **vector velocidad** o **vector tangente**:

$$\alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$$

y la **velocidad**:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2}$$



La **recta tangente** a la curva suave  $\gamma$  en el punto  $\alpha(t_0)$  es, en forma vectorial y paramétrica:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(t_0) + t\alpha'(t_0) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t_0) + tx'_1(t_0) \\ x_2 = x_2(t_0) + tx'_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_0) + tx'_n(t_0) \end{cases}$$

y en forma cartesiana (cuando ninguna derivada se anula):

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \frac{x_2 - x_2(t_0)}{x'_2(t_0)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x'_n(t_0)}$$

En el caso particular de curvas planas la parametrización se suele expresar por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , y la recta tangente en el punto  $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$  es

$$(x(t), y(t)) = (x(t_0), y(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0)) \quad \begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \end{cases}$$

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} \quad (\text{si } x'(t_0) \neq 0 \text{ e } y'(t_0) \neq 0)$$

En este caso, son también de interés los puntos en los que la tangente es horizontal o vertical:

- Un punto  $\alpha(t_0)$  es de **tangente horizontal** si  $y'(t_0) = 0$ .
- Un punto  $\alpha(t_0)$  es de **tangente vertical** si  $x'(t_0) = 0$ .

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Para cada una de las siguientes curvas, halla ecuaciones paramétricas, indica el sentido en que se recorren y esboza su gráfica:

(a) Segmento  $\overline{AB}$  con  $A(-1, 3)$  y  $B(4, 1)$       (b)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$       (c)  $y^2 = x^3$

2. Para cada una de las siguientes curvas, halla ecuaciones cartesianas y esboza su gráfica:

(a)  $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$       (b)  $\begin{cases} x = 2 - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \pi \leq t \leq 2\pi$       (c)  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = -2 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto que se indica:

(a)  $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos t \end{cases}, t = \frac{\pi}{3}$       (b)  $\begin{cases} x = (t - 1)^2 \\ y = (t^2 - 2)^2 \end{cases}, P(1, 4)$

4. Encuentra los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva:

$$\{x = 4 + 2 \cos t, y = -1 + \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

5. Encuentra las coordenadas cartesianas del punto más alto de la curva:  $\begin{cases} x = 96t \\ y = 96t - 16t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

6. Dos partículas parten en el instante  $t = 0$  siguiendo la trayectoria indicada por las curvas:

Partícula 1:  $\begin{cases} x = \frac{16}{3} - \frac{8}{3}t \\ y = 4t - 5 \end{cases}, t \geq 0$       Partícula 2:  $\begin{cases} x = 2 \sin \frac{\pi}{2}t \\ y = -3 \cos \frac{\pi}{2}t \end{cases}, t \geq 0$

¿En qué puntos se cortan sus trayectorias? ¿En qué puntos chocan las partículas?

7. Haz un esbozo de la gráfica de la curva  $\{x = a \cos t, y = a \sin t, z = t; t \geq 0\}$ .
8. Determina el punto de la curva  $\{x = 1 - 2t, y = t^2, z = 2e^{2(t-1)}; t \in \mathbb{R}\}$  en el que el vector tangente es paralelo al vector de posición.

### PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Para cada una de las siguientes curvas, halla ecuaciones paramétricas, indica el sentido en que se recorren y esboza su gráfica:

(a)  $x^2 + y^2 = 3$       (b)  $4x^2 + 9y^2 = 36$       (c)  $y = x^2$

2. Para cada una de las siguientes curvas, halla ecuaciones cartesianas y esboza su gráfica:

(a)  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 5 \end{cases}, t \in [-1, 2]$       (b)  $\begin{cases} x = (t - \pi)^3 \\ y = (t - \pi)^2 \end{cases}, t \geq 0$       (c)  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $\begin{cases} x = 2t - \pi \sin t \\ y = 2 - \pi \cos t \end{cases}$  en el punto  $P(0, 2)$ .

4. Encuentra los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva  $\{x = 1 - t, y = t^3 - 3t; t \in \mathbb{R}\}$ .

5. Haz un esbozo de la gráfica de la curva  $\{x = 2t + 1, y = 3t - 5, z = 1 - t; t \in \mathbb{R}\}$ .

6. Halla la recta tangente a la curva  $\{x = \sin^2 t, y = t^2, z = \sqrt{2t}; 0 \leq t \leq \pi\}$  en el punto  $t = \frac{\pi}{2}$ .