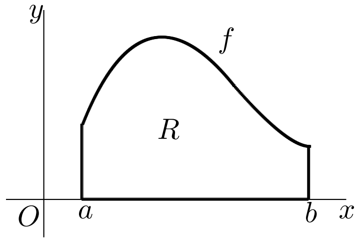
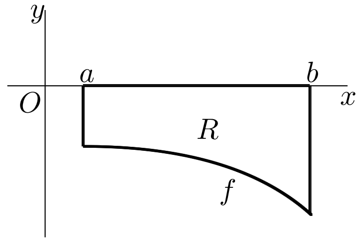
4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

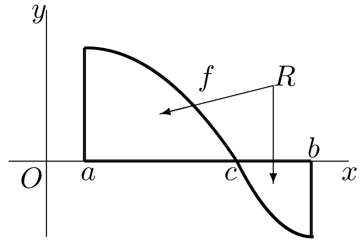
4.4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

4.4.1. Área de una región plana

Como ya se ha visto en 4.1.7, el cálculo de areas de regiones planas limitadas entre la gráfica de una función y el eje de abscisas se puede realizar mediante la integral definida:

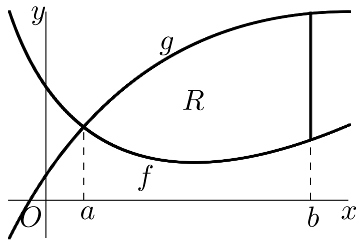






$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad A(R) = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

En general, el área de la región plana limitada por las gráficas de dos funciones entre las rectas $x = a$ y $x = b$ es:



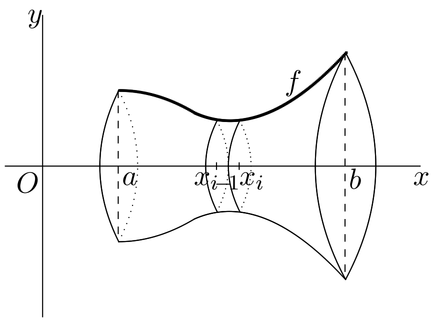
$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

4.4.2. Ejemplo

Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = x^3 - 2x$.

4.4.3. Volumen de un sólido de revolución

El cuerpo engendrado al girar la gráfica de una función f, entre $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje de abscisas se llama **sólido de revolución**.



A partir de la partición $P = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ el sólido de revolución se descompone en n secciones cuyos volúmenes se pueden aproximar por los de los cilindros de altura $x_i - x_{i-1}$ y base la circunferencia de radio $f(\alpha_i)$ con $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$, es decir:

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} \pi\,(f(\alpha_i))^2\,(x_i - x_{i-1})$$

El volumen del sólido de revolución se puede interpretar como el límite cuando el diámetro de la partición tiende a cero de las sumas anteriores, que son las sumas de Riemann de la función $\pi\,(f(x))^2$ asociadas a la partición P y a los puntos $\{\alpha_i\}$. Por tanto, si la función f es integrable el volumen es:

$$V = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\,(f(\alpha_i))^2\,(x_i - x_{i-1}) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Cuando el recinto que gira alrededor del eje de abscisas es el comprendido entre dos funciones f y g, con $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces el volumen del sólido obtenido es:

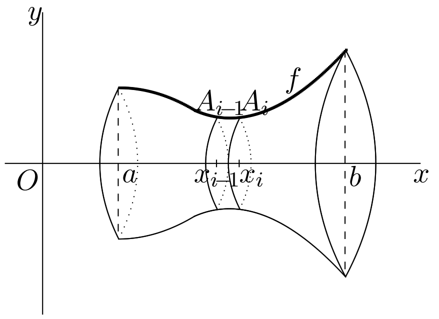
$$V = \pi \int_a^b \left[(g(x))^2 - (f(x))^2\right]\,dx$$

4.4.4. Ejemplo

Halla el volumen del sólido de revolución engendrado al girar alrededor del eje de abscisas el recinto limitado por las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

4.4.5. Área de una superficie de revolución

Se trata ahora de hallar el área de la superficie del cuerpo de revolución engendrado al girar la gráfica de una función f, entre $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje de abscisas.



A partir de la partición $P = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ el sólido de revolución se descompone en n secciones cuyas superficies laterales se pueden aproximar por las de los cilindros con bases de radios $f(\alpha_i)$, $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$, y alturas:

$$\begin{aligned}\overline{A_{i-1}A_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}))^2}\\ &= \sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

Por tanto, el área del sólido de revolución se puede aproximar por:

$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\alpha_i)\sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1})$$

que son las sumas de Riemann de la función $2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ asociadas a la partición P y a los puntos $\{\alpha_i\}$. Por tanto, el área de la superficie de revolución se puede interpretar como el límite cuando el diámetro de la partición tiende a cero de las sumas anteriores que, si la función f es integrable, es:

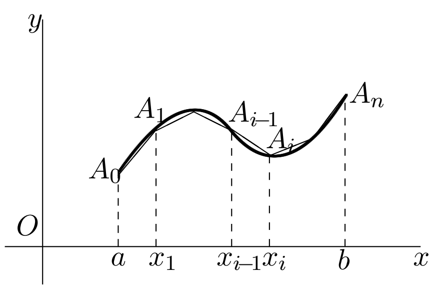
$$V = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\alpha_i)\sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

4.4.6. Ejemplo

Halla el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = \cosh x$, $0 \leq x \leq 2$, alrededor del eje de abscisas.

4.4.7. Longitud de una curva

Se trata de hallar la longitud de la gráfica de una función f entre $x = a$ y $x = b$.



La gráfica de la función se puede aproximar por la poligonal con vertices en los puntos $\{A_i\}$ asociados a la partición $P = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Aplicando el teorema de valor medio:

$$\begin{aligned}\overline{A_{i-1}A_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}))^2}\\ &= \sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

donde $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$. Por tanto, la longitud de la curva se puede aproximar por:

$$L \simeq \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1})$$

que son las sumas de Riemann de la función $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ asociadas a la partición P y a los puntos $\{\alpha_i\}$. Por tanto, la longitud se puede interpretar como el límite cuando el diámetro de la partición tiende a cero de las sumas anteriores que, si la función f es integrable, es:

$$L = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\alpha_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

4.4.8. Ejemplo

Halla la longitud de la curva $y = \cosh x$, $1 \leq x \leq 2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halla el área encerrada por las curvas $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$, entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Determina el área encerrada por las parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$, $p > 0$.

3. Dibuja el recinto $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|\right\}$ y calcula su área.

4. Sean $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a para los que el área de la región acotada limitada por ambas funciones es $9/2$.

5. Dadas las funciones $f(x) = -xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

(a) Calcula el área de la región acotada limitada por sus gráficas.

(b) Estudia si el área de la región comprendida entre sus gráficas en $x \geq 0$ es o no finita.

6. Calcula el volumen del hiperboloide engendrado al girar alrededor del eje de abscisas la porción de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$, comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = 2a$.

7. Halla el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = 2x$ alrededor del: (a) eje de abscisas; (b) eje de ordenadas.

8. Dada una esfera de radio r, se pide:

(a) Su volumen.

(b) El volumen del sector esférico de altura h, obtenido al cortar la esfera por un plano perpendicular a un diámetro al que lo corta a una distancia h de su extremo.

(c) Halla h para que el volumen del sector esférico sea un tercio del volumen total de la esfera.

9. Un **toro** es el sólido obtenido al girar una circunferencia de radio r alrededor de un eje que está a distancia R, $R > r$, del centro de la circunferencia. Calcula su volumen.

10. Un tanque de gasolina con forma de cilindro de radio r y longitud l, se halla situado horizontalmente. Determina el volumen de gasolina en el tanque cuando la misma llega a una altura h, $0 \leq h \leq 2r$.

11. Considera la región acotada limitada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = ax$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que el volumen de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje de abscisas valga $\frac{64\pi}{15}$.

12. Halla el área de una esfera de radio r.

13. Calcula la superficie de un espejo parabólico de base un círculo de radio 4 m y altura 1 m.

14. Halla la longitud de la astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

15. Halla la longitud de la catenaria (cable colgante) $y = a\cosh\frac{x}{a}$ desde el vértice $(0, a)$ hasta el punto (b, h).

16. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = 2 - 3t + t^2$ m/seg en el instante t. Su posición inicial (en el instante $t = 0$) es 2 metros a la derecha del origen. Halla la posición del objeto 4 segundos más tarde.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla el área de la región limitada por las curvas $x = y^2$ y $x - y = 2$.

2. Halla el área de la región del plano limitada por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$.

3. Demuestra que las áreas de los recintos comprendidos entre el eje de abscisas y las ondas de la curva $y = e^{-x} \sin x$ forman una progresión geométrica decreciente de razón $e^{-\pi}$. Halla el área total de las ondas situadas a la derecha del eje de ordenadas.

4. Considérese un semicírculo de radio R y dos semirrectas perpendiculares a su diámetro en sus extremos. Determina la altura a que se debe colocar una recta paralela al diámetro para que sea mínima la suma del área del semicírculo sobre ella con las áreas bajo ella exteriores al semicírculo y comprendidas entre las semirrectas paralelas.

5. Determina el área de la región formada por los puntos de un cuadrado de lado l que están más cerca del centro que del borde.

6. Calcula el volumen que queda de una esfera de radio $2r$, si se elimina el volumen limitado por un cilindro circular de radio r que tiene por eje un diámetro de la esfera.

7. Dadas las curva $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ y $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, con $r > 0$, se pide:

(a) El área del región común al interior de ambas curvas.

(b) El volumen del sólido de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje de ordenadas.

8. Un barril es diseñado mediante rotación alrededor del eje de abscisas de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ entre las rectas $x = -l/2$ y $x = l/2$, $0 < l < 2a$. Determina la capacidad del barril.

9. Calcula el área de la superficie que resulta al girar $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, alrededor del eje de abscisas.

10. Halla la longitud de una circunferencia de radio r.

11. Halla la longitud de la curva dada por la ecuación $f(x) = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt$, entre $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

12. Un objeto se mueve a lo largo del eje de abscisas con aceleración $a(t) = 2t$ m/seg^2. Su posición inicial (en el instante $t = 0$) es 5 metros a la derecha del origen. Un segundo más tarde, el objeto se está moviendo hacia la izquierda a una velocidad de 4 m/seg.

(a) ¿Cuál es la posición del objeto en el instante $t = 4$?

(b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto durante los 4 primeros segundos?