4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

4.3. INTEGRALES IMPROPIAS

Hasta ahora se han considerado integrales sobre intervalos acotados de funciones acotadas, es decir, integrales de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada. Cuando falla alguna de estas hipótesis la integral se llama impropia.

4.3.1. Integrales impropias

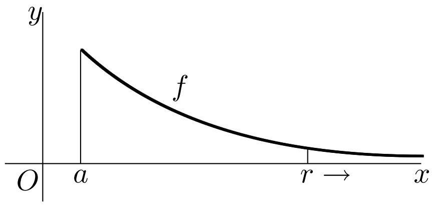
Se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una **integral impropia** cuando el intervalo de integración es infinito (a o b son $\pm\infty$) o la función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ no está acotada.

- **Integral impropia de primera especie:** Es cualquier integral de la forma

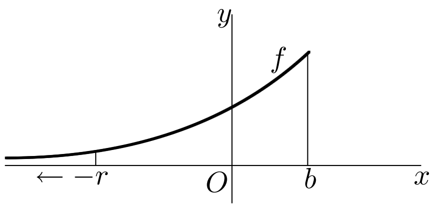
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[-r, b]$ o $[a, r]$, según el caso, con $r \in \mathbb{R}$. En estos casos se define la integral impropia como:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r \to +\infty} \int_a^r f(x)\,dx$$



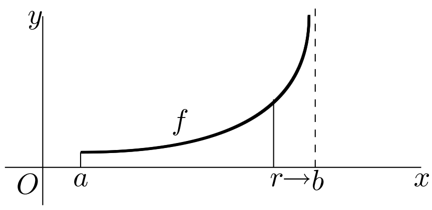
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{b} f(x)\,dx$$



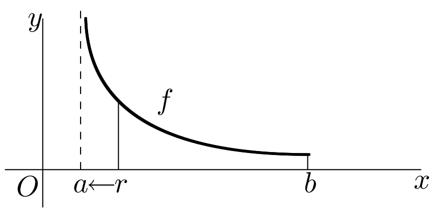
siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

- **Integral impropia de segunda especie:** Es cualquier integral de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es acotada en cada intervalo de la forma $[a, r]$ o $[r, b]$, según el caso, con $a < r < b$. En estos casos se define la integral impropia como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx$$



siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

- Cualquier integral impropia se puede descomponer en suma de integrales impropias de primera y/o segunda especie. Se dice que la integral es convergente cuando lo son todas las integrales de primera y/o segunda especie en que se descompone, siendo divergente en caso contrario.

4.3.2. Ejemplos

Estudia la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \qquad \textbf{(b)}\ J_p = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \qquad \textbf{(c)}\ \int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$$

En caso de convergencia, determina su valor.

4.3.3. Criterio de comparación

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces:

- $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ diverge

4.3.4. Ejemplos

Estudia la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \qquad \textbf{(b)}\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Evalúa las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \textbf{(b)}\ \int_0^1 x \ln x\, dx \qquad \textbf{(c)}\ \int_\pi^{\infty} \cos^2 x\, dx \qquad \textbf{(d)}\ \int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$$

2. Evalúa las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ \int_{-3}^{3} \frac{dx}{x(x+1)} \qquad \textbf{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \qquad \textbf{(c)}\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$$

3. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \textbf{(c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2x^2+b^2}\ ,\ ab \neq 0 \qquad \textbf{(e)}\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\textbf{(b)}\ \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\, dx \qquad \textbf{(d)}\ \int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx \qquad \textbf{(f)}\ \int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Evalúa las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textbf{(b)} \int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx \qquad \textbf{(c)} \int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$$

2. Estudia la convergencia, según los valores de p y q, de las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{(a)}\ \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \qquad \textbf{(b)}\ \beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + (t-b)^2}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Se pide:

(a) Esboza su gráfica en el caso $a = 1$ y $b = 0$.

(b) Obtén explícitamente $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$.

(c) Determina el área comprendida entre la gráfica y el eje de abscisas.