4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

4.2. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Por la regla de Barrow, el cálculo de una integral (de Riemann) se reduce a hallar una primitiva de la función y evaluarla en los extremos del intervalo de integración. Por este motivo, el cálculo de primitivas cobra especial importancia, y aquí nos dedicaremos a exponer sus reglas fundamentales.

4.2.1. Primitiva e integral indefinida

Una función F se llama **primitiva** o **antiderivada** de f en $D \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in D$. La primitiva de una función no es única pues, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también son primitivas todas las funciones de la forma $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante. Se llama **integral indefinida**, o simplemente **integral**, de f al conjunto de todas sus primitivas, y se suele expresar:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria y F una primitiva de f.

4.2.2. Primitivas inmediatas

Una primitiva o integral es inmediata si se reconoce fácilmente como derivada de alguna función, por tanto, dicho concepto es relativo. Puesto que la integración es la operación inversa de la derivación, es fácil obtener la siguiente tabla de primitivas inmediatas:

$\int k\,dx = kx + c \quad (k \in \mathbb{R})$	
$\int x^p\,dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad (p \neq -1)$	$\int u^p(x)u'(x)\,dx = \dfrac{u^{p+1}(x)}{p+1} + c \quad (p \neq -1)$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\|u(x)\| + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int u'(x)e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)} + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	$\int u'(x)a^{u(x)}\,dx = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int u'(x)\sin u(x)\,dx = -\cos u(x) + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int u'(x)\cos u(x)\,dx = \sin u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right)\,dx = \tan x + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,dx = \tan u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + \cot^2 x\right)\,dx = -\cot x + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}\,dx = -\cot u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}\,dx = \arcsin u(x) + c$
$\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}\,dx = \arctan u(x) + c$
$\int \sec x\,dx = \int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\|\sec x + \tan x\| + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cos u(x)}\,dx = \ln\|\sec u(x) + \tan u(x)\| + c$
$\int \csc x\,dx = \int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\|\csc x - \cot x\| + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sin u(x)}\,dx = \ln\|\csc u(x) - \cot u(x)\| + c$

Las dos últimas integrales que aparecen en la tabla no son realmente inmediatas y su cálculo es ciertamente laborioso. Sin embargo, se incorporan a la lista por las funciones implicadas y la frecuencia con que aparecen.

4.2.3. Ejemplos

Calcula las siguientes integrales reducibles inmediatas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2+3\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

4.2.4. Integración por cambio de variable

Si en la integral de $f(x)$ se hace un cambio de la variable x a una nueva variable t, relacionadas mediante la función $x=\varphi(t)$, se obtiene:

$$\int f(x)\,dx = \left(\begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{array}\right) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t)+c = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+c$$

ya que si $F(t)$ es una primitiva de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ entonces:

$$\frac{dF\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{dx} = \frac{dF\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$$

es decir, $F\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ es primitiva de $f(x)$. Obviamente, este cambio es efectivo cuando la integral respecto de t es más sencilla que respecto de x.
Con frecuencia la relación que proporciona el cambio de variable suele aparecer como $t=\psi(x)$, siendo en este caso $x=\varphi(t)=\psi^{-1}(t)$.

4.2.5. Ejemplos

Calcula por cambio de variable las siguientes integrales: **(a)** $\displaystyle\int x\sqrt{x-5}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$.

4.2.6. Integración por partes

Tomando primitivas en la fórmula de la derivada de un producto, y puesto que la integral de una derivada es la propia función:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \;&\Longrightarrow\; \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \;\Longrightarrow \\ &\Longrightarrow\; f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \;\Longrightarrow \\ &\Longrightarrow\; \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

Si $u=f(x)$ y $v=g(x)$, $du=f'(x)dx$ y $dv=g'(x)dx$, y sustituyendo en la fórmula anterior se obtiene la conocida **fórmula de integración por partes**:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

4.2.7. Ejemplos

Calcula las siguientes integrales mediante integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

4.2.8. Integrales de funciones racionales

Toda función racional en la que el grado de numerador sea mayor o igual que el grado del denominador se puede reducir ala suma de un polinomio con otra función racional en la que el grado de numerador es inferior al grado del denominador. Para ello basta efectuar la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & c(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad P(x) = Q(x)c(x) + r(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Obviamente, si el grado de P es menor que el grado de Q no se efectúa la división, y entonces $c = 0$ y $r = P$. Una vez que el grado del numerador es inferior al grado del denominador, se puede proceder a la **descomposición en fracciones simples**:

- Se halla la descomposición factorial del denominador en la que pueden aparecer los siguientes factores:

$$Q(x) = (x-a)\cdot(x-b)^p \cdot [(x-\alpha)^2+\beta^2]\cdot[(x-\gamma)^2+\delta^2]^q \cdot \ldots \qquad (p, q > 1)$$

  donde se ha supuesto que el coeficiente de grado máximo en $Q(x)$ es 1. Si no es así, se saca factor común y divide al numerador $r(x)$.

- Se buscan números reales A, B_i, C, D, E_i y F_i tales que:

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \sum_{i=1}^{q} \frac{E_i x + F_i}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^i} + \ldots$$

Después de esto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} = c(x) + \frac{A}{x-a} + \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \sum_{i=1}^{q} \frac{E_i x + F_i}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^i} + \ldots$$

y entonces, la integral racional es:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{A}{x-a}\,dx + \sum_{i=1}^{p} \int \frac{B_i}{(x-b)^i}\,dx + \int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{q} \int \frac{E_i x + F_i}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^i}\,dx + \ldots$$

con lo que queda reducida a hallar la integral de un polinomio y todas o algunas de las siguientes integrales:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx \qquad \int \frac{B_i}{(x-b)^i}\,dx \;\; (i>1) \qquad \int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \qquad \int \frac{E_i x + F_i}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^i}\,dx \;\; (i>1)$$

Las tres primeras son fáciles de resolver:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| + c$$
$$\int \frac{B_i}{(x-b)^i}\,dx = B_i \int (x-b)^{-i}\,dx = B_i \frac{(x-b)^{-i+1}}{-i+1} + c = \frac{-B_i}{(i-1)(x-b)^{i-1}} + c$$
$$\int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{C(x-\alpha)+(C\alpha+D)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{C(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \int \frac{(C\alpha+D)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx =$$
$$= \frac{C}{2} \ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{C\alpha+D}{\beta} \arctan \frac{x-\alpha}{\beta}$$

mientras que el método general para la última es algo más complicado (integración por partes y reducción de exponente en el denominador), aunque en casos particulares puede ser más sencilla de resolver.

4.2.9. Ejemplos

Calcula las siguientes integrales: **(a)** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx$.

4.2.10. Integrales de funciones racionales trigonométricas

Son integrales de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

donde R es una función racional, es decir, es un cociente de polinomios en senos y cosenos. Todas estas integrales se reducen a integrales racionales mediante el cambio de variable:

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

en cuyo caso:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

En algunos casos particulares, hay cambios más sencillos que también las reducen a integrales racionales:

- Si R es impar en seno, es decir, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \cos x$.
- Si R es impar en coseno, es decir, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \sin x$.
- Si R es par en seno y coseno, es decir, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, se hace el cambio $t = \tan x$.

4.2.11. Ejemplos

Calcula las siguientes integrales: **(a)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

4.2.12. Integrales de algunas funciones irracionales

Las integrales de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 \pm b^2x^2}\right)\,dx \qquad\qquad \int R\left(x, \sqrt{a^2x^2 - b^2}\right)\,dx$$

se pueden reducir a integrales de funciones racionales trigonométricas mediante los siguientes cambios de variable:

- Si $R = R\left(x, \sqrt{a^2-b^2x^2}\right)$, se hace el cambio $bx = a\sin t$ o $bx = a\cos t$.
- Si $R = R\left(x, \sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$, se hace el cambio $bx = a\tan t$.
- Si $R = R\left(x, \sqrt{a^2x^2-b^2}\right)$, se hace el cambio $ax = b\sec t$.

4.2.13. Ejemplos

Calcula las siguientes integrales: **(a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$; **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

$$\textbf{(a)} \int \frac{dx}{9x^2+25} \qquad \textbf{(b)} \int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,dx \qquad \textbf{(c)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \qquad \textbf{(d)} \int \frac{\cos x}{\sin x \ln(\sin x)}\,dx$$

2. Calcula, mediante un cambio de variable adecuado, las siguientes integrales:

$$\textbf{(a)} \int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx \qquad \textbf{(b)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \qquad \textbf{(c)} \int \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

3. Calcula, mediante integración por partes, las siguientes integrales:

$$\textbf{(a)} \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \quad \textbf{(b)} \int (\ln x)^2\,dx \quad \textbf{(c)} \int x^3 e^{-x^2}\,dx \quad \textbf{(d)} \int x^2 \sin x\,dx \quad \textbf{(e)} \int x^3 \ln(1+x^2)\,dx$$

4. Calcula las siguientes integrales racionales:

$$\textbf{(a)} \int \frac{x^3\,dx}{x^3+2x^2-x-2} \qquad \textbf{(b)} \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx \qquad \textbf{(c)} \int \frac{x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

5. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

$$\textbf{(a)} \int \sin^2 x\,dx \qquad \textbf{(c)} \int \cos^4 x\,dx \qquad \textbf{(e)} \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

$$\textbf{(b)} \int \cos^2 x\,dx \qquad \textbf{(d)} \int \sin^5 x\,dx \qquad \textbf{(f)} \int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$$

6. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

$$\textbf{(a)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \textbf{(b)} \int \frac{dx}{\sin x} \quad \textbf{(c)} \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \quad \textbf{(d)} \int \frac{dx}{1+\sin x} \quad \textbf{(e)} \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

7. Usando las fórmulas trigonométricas:

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \end{array} \qquad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

calcula, si $a \neq b$, las siguientes integrales:

$$\textbf{(a)} \int \sin ax \sin bx\,dx \qquad \textbf{(b)} \int \sin ax \cos bx\,dx \qquad \textbf{(c)} \int \cos ax \cos bx\,dx$$

8. Calcula, mediante un cambio a funciones trigonométricas, las siguientes integrales de funciones irracionales:

$$\textbf{(a)} \int \sqrt{16-x^2}\,dx \qquad \textbf{(b)} \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx \qquad \textbf{(c)} \int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx \qquad \textbf{(d)} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x}}$$

9. Calcula las siguientes integrales irracionales:

$$\textbf{(a)} \int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \textbf{(b)} \int x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\,dx \qquad \textbf{(c)} \int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$$

10. Halla la integral: $\int x f''(x)\,dx$.

11. Encuentra una función f, dos veces derivable, que verifica:

$$f'(x) = x f''(x) \ , \quad f(1) = 2 \ , \quad f'(1) = -1$$

12. Encuentra la función $y = f(x)$ que verifica:

(a) $y' = 3x^{-2/3}\,;\ y(-1) = 2.$ **(b)** $y'' = 1 + x\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

(a) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \tan x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

2. Calcula, mediante un cambio de variable adecuado, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

3. Calcula, mediante integración por partes, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int xe^x\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$

4. Calcula, para $a,b\neq 0$, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int e^{ax}\sin^2 bx\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$

5. Calcula las siguientes integrales racionales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{x^3-7x^2+15x-9}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$

6. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$

7. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

8. Calcula, mediante un cambio a funciones trigonométricas, las siguientes integrales de funciones irracionales:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{16+x^2}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \sqrt{x^2-16}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

9. Calcula, mediante un cambio a funciones trigonométricas, las siguientes integrales ($a\neq 0$):

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ **(b)** $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

10. Utiliza el cambio de variable $x=a\tan u$ para evaluar integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

Halla las primitivas resultantes para $n=2$ y $n=3$.

11. Calcula las siguientes integrales irracionales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$

12. Halla las fórmulas de reducción para las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle S_m=\int \sin^m x\,dx$ **(b)** $\displaystyle C_m=\int \cos^m x\,dx$ **(c)** $\displaystyle T_m=\int \tan^m x\,dx$

13. Encuentra la función $y=f(x)$ que verifica:

(a) $y'=x^2\,;\ y(0)=-1.$ **(b)** $y'=\sin 2x\,;\ y(\pi)=1.$