

3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

3.3. TEOREMAS DE VALOR MEDIO Y APLICACIONES

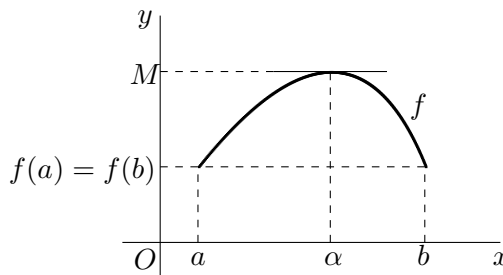
3.3.1. Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Demostración: Puesto que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede aplicar el teorema de Weierstrass (2.3.14) y alcanza el máximo M y el mínimo m absolutos en dicho intervalo.

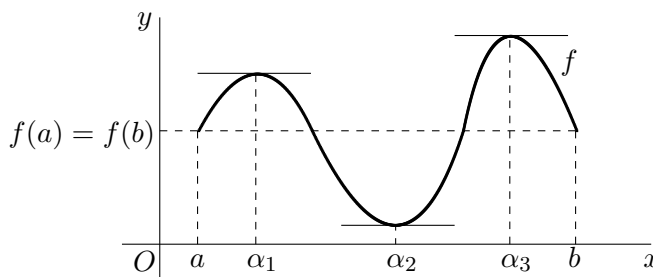
Si $M = m$ entonces f es constante en $[a, b]$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Si $M \neq m$, alguno de ellos lo alcanza en el interior del intervalo (a, b) . Sea, por ejemplo, $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = M$. Puesto que este máximo absoluto, al alcanzarlo en el interior del intervalo, es también relativo, entonces $f'(\alpha) = 0$.



Interpretación geométrica: El teorema de Rolle afirma que la gráfica tiene un punto con tangente horizontal (derivada nula).

Sin embargo, no asegura que sea único: la gráfica de la figura tiene tres puntos con tangente horizontal (derivada nula).



3.3.2. Ejemplos

Aplica, si es posible, el teorema de Rolle a las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ en $[0, 4]$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ en $[0, 2]$

3.3.3. Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$[f(b) - f(a)] g'(\alpha) = [g(b) - g(a)] f'(\alpha)$$

Además, si $g(a) \neq g(b)$ y las derivadas de f y g no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b) , se puede escribir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Demostración: Se considera la función F definida por:

$$F(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$$

que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, por lo que se le puede aplicar el teorema de Rolle y existe $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$F'(\alpha) = [f(b) - f(a)] g'(\alpha) - [g(b) - g(a)] f'(\alpha) = 0 \implies [f(b) - f(a)] g'(\alpha) = [g(b) - g(a)] f'(\alpha)$$

como se quería demostrar.

3.3.4. Ejemplo

Aplica, si es posible, el teorema de Cauchy a $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$.

3.3.5. Teorema de valor medio

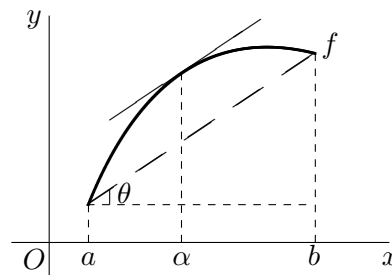
Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a)$$

Demostración: Basta aplicar el teorema de Cauchy a f y $g(x) = x$.

Interpretación geométrica: el teorema asegura que existe un punto de la gráfica donde la pendiente de la tangente es:

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \theta$$



es decir, donde la tangente es paralela a la secante que pasa por los extremos de la gráfica.

3.3.6. Corolario 1

Si f es derivable en el intervalo I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I .

Demostración: Si $x, y \in I$, $x < y$, son dos puntos cualesquiera del intervalo, aplicando el teorema de valor medio a la función f en el intervalo $[x, y]$, existe $\alpha \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(\alpha)(y - x) = 0(y - x) = 0$$

es decir, $f(x) = f(y)$, y esto para cualesquiera $x, y \in I$. Por tanto, f es constante en (a, b) .

3.3.7. Corolario 2

Si f y g son derivables en I y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f - g$ es constante en I .

Demostración: La función $f - g$ es derivable en I y $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Por tanto, aplicando el corolario 1, $f - g$ es constante en I .

3.3.8. Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de a (que puede ser finito o infinito) con $g'(x) \neq 0$ cerca de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ son simultáneamente 0 o $\pm\infty$, entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista.

Demostración: Sólo demostraremos el caso 0/0. Definiendo $f(a) = g(a) = 0$, las funciones f y g verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo $I_a = [a, x]$ o $I_a = [x, a]$, según proceda, y aplicándolo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \alpha \in I_a}} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow a} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ya que $\alpha \rightarrow a$ cuando $x \rightarrow a$.

3.3.9. Ejemplos

1. Halla, aplicando la regla de L'Hôpital, los siguiente límites:

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-1}{x+1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ |

2. En el cálculo de los dos siguientes límites se ha aplicado incorrectamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \cos \frac{1}{x}}{1} = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad \text{no existe}$$

Encuentra el motivo de su mala aplicación, y hálloslos correctamente sin aplicar la regla de L'Hôpital.

3.3.10. Aproximación de funciones por polinomios. Polinomio de Taylor

Los polinomios son funciones muy sencillas y apropiadas para el cálculo numérico. Este es uno de los motivos por los que es interesante desarrollar métodos que permitan aproximar funciones arbitrarias mediante polinomios.

Con el objetivo inicial de aproximar una función f por un polinomio P alrededor de un punto a , parece lógico pedir que en el punto coincidan sus valores y los de sus primeras derivadas hasta el mayor orden posible. Se trata, por tanto, de encontrar el polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$$

que tenga el mayor número posible de derivadas iguales a las de f en a . Imponiendo estas condiciones se obtienen los coeficientes del polinomio:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots + a_n(x - a)^n && \implies P(a) = a_0 = f(a) \\ P'(x) &= a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \dots + na_n(x - a)^{n-1} && \implies P'(a) = a_1 = f'(a) \\ P''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - a) + \dots + n(n - 1)a_n(x - a)^{n-2} && \implies P''(a) = 2a_2 = f''(a) \\ P'''(x) &= 3!a_3 + \dots + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - a)^{n-3} && \implies P'''(a) = 3!a_3 = f'''(a) \\ &\vdots && \\ P^{(n)}(x) &= n!a_n && \implies P^{(n)}(a) = n!a_n = f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

de donde:

$$a_0 = f(a) \quad a_1 = f'(a) \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \quad \dots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si f es una función derivable n veces en a , se llama **polinomio de Taylor** de orden n de la función f en a al polinomio:

$$P_n^a(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

La diferencia entre la función y el polinomio se llama término complementario:

$$T_n(x) = f(x) - P_n^a(x)$$

que, obviamente, verifica:

$$T_n(a) = T_n'(a) = \dots = T_n^{(n)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad T_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

siempre que f sea derivable $n + 1$ veces en a . Aplicando reiteradamente el teorema de Cauchy a $T_n(x)$ y $g(x) = (x - a)^{n+1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{T_n(x)}{(x - a)^{n+1}} &= \frac{T_n(x) - T_n(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{T_n'(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)} = \frac{T_n'(\alpha_1) - T_n'(a)}{g'(\alpha_1) - g'(a)} = \frac{T_n''(\alpha_2)}{g''(\alpha_2)} = \\ &= \dots = \frac{T_n^{(n)}(\alpha_n)}{g^{(n)}(\alpha_n)} = \frac{T_n^{(n)}(\alpha_n) - T_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(\alpha_n) - g^{(n)}(a)} = \frac{T_n^{(n+1)}(\alpha)}{g^{(n+1)}(\alpha)} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

donde α está comprendido entre a y x . Despejando, se obtiene el **término complementario o resto de Lagrange**:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{con } \alpha \text{ entre } a \text{ y } x$$

Al sumar el polinomio de Taylor con el término complementario, se obtiene la **fórmula de Taylor**:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{polinomio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{resto de Lagrange}}$$

con α entre a y x .

En el caso particular $a = 0$, la fórmula de Taylor se llama **fórmula de McLaurin**:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{polinomio de McLaurin}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{resto de Lagrange}}$$

con α entre 0 y x .

Observación: El polinomio de Taylor aproxima a la función en un entorno del punto. La aproximación es mejor cuánto más próximos estemos del punto.

3.3.11. Ejemplos

- Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/4$. Úsalo para hallar un valor aproximado de $\tan \frac{\pi}{3}$ y acota el error cometido.
- Halla el polinomio de McLaurin de orden 3 de $f(x) = e^x$. Úsalo para hallar un valor aproximado del número e y acota el error cometido.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, encuentra el punto cuya existencia asegura el teorema.

(a) $f(x) = |x|$, en $[-1, 1]$ (b) $f(x) = \sin^2 x$, en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $[-1, 1]$

- Demuestra que la ecuación $3x^4 - 24x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.
- Comprueba que las siguientes funciones satisfacen las condiciones del teorema de valor medio en el intervalo que se indica, y encuentra el punto cuya existencia asegura el teorema:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, en $[1, 4]$ (b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, en $[0, 2]$ (c) $f(x) = \cos x$, en $[0, \frac{\pi}{2}]$

- Halla el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+x)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}} \right]$

- Halla los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{cosec} 2x}{1 + \tan x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$ ($\beta \neq 0$)
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

6. Halla los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\tan \frac{a}{x} - \tan \frac{b}{x} \right)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$

7. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Obtén f' y f'' .

(b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y f' .

(c) Dibuja su gráfica.

8. Obtén el desarrollo de McLaurin de orden 3 de la función $f(x) = \sin x$.

9. Justifica y evalúa el error de la siguiente relación:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad , \quad \text{para } |x| < 1$$

10. Halla los tres primeros términos del desarrollo de Taylor de:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = -1$

(b) $g(x) = \ln \cos x$, en $x = \frac{\pi}{3}$

11. Halla el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \ln x$ en un entorno del punto $x = 1$. Halla una cota del error cometido al hallar $\ln \frac{3}{2}$ usando dicho polinomio.

12. Halla el polinomio de Taylor de grado 4 en un entorno de $x = 1$ de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$.

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$ entonces se anula su derivada en un punto interior del intervalo.

(b) Si f es continua y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces su derivada se anula en un punto interior del intervalo.

(c) Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y su derivada se anula en un $\alpha \in (a, b)$, entonces $f(a) = f(b)$.

(d) Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) \neq f(b)$, entonces $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

(e) Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(a) \neq f(b)$.

(f) El límite de una función coincide con el límite de su derivada.

(g) Una función coincide con su polinomio de Taylor en las proximidades del punto.

2. Sea f una función dos veces derivable en $[a, b]$ y tal que $f(a) = f(c) = f(b)$ para cierto $c \in (a, b)$. ¿Se puede asegurar que se anula su derivada segunda en dicho intervalo?

3. Demuestra que $\arctan \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{x}{2}$, para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)} \right]$

5. Demuestra que si f admite derivada segunda, entonces:

$$(a) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (b) f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, encuentra el punto cuya existencia asegura el teorema.

$$(a) f(x) = x, \text{ en } [1, 2] \quad (b) f(x) = \sqrt[3]{x} - 1, \text{ en } [-8, 8] \quad (c) f(x) = x^2 - (a+b)x + ab, \text{ en } [a, b]$$

2. Demuestra que la ecuación $x^5 + 5x - 3 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

3. Encuentra valores de a , b y c para que la siguiente función satisfaga el teorema de valor medio.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{ si } x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ bx + c & , \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

4. Comprueba que las siguientes funciones satisfacen las condiciones del teorema de valor medio en el intervalo que se indica, y encuentra el punto cuya existencia asegura el teorema:

$$(a) f(x) = 2x^2 + 1, \text{ en } [0, 2] \quad (b) f(x) = x^3 + x, \text{ en } [1, 2] \quad (c) f(x) = x^4 + 2, \text{ en } [-1, 2]$$

5. Demuestra las desigualdades:

$$(a) |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad (b) |\tan x - \tan y| \geq |x - y|, \text{ con } -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$$

6. Demuestra que cuando $x < 1$ se cumple que: $\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \frac{\pi}{4}$

7. Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$$

8. Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/\ln x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{x} \right)^x \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} (\cotan x)^{\sin x}$$

9. Halla valores de a y b para que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - b}{2x^2} = -4$

10. Halla las dos primeras derivadas, en $x = 0$, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

11. Halla \sqrt{e} a partir del polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$, y acota el error cometido.

12. Halla $\sqrt[3]{30}$ a partir del polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en un entorno del punto $x = 27$, y acota el error cometido.