

### 3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

#### 3.2. PROPIEDADES LOCALES Y OPTIMIZACIÓN

Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left\{ \begin{array}{l} > 0 \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ < 0 \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \end{array} \right\} \text{ en un entorno de } a$$

de donde se deduce que:

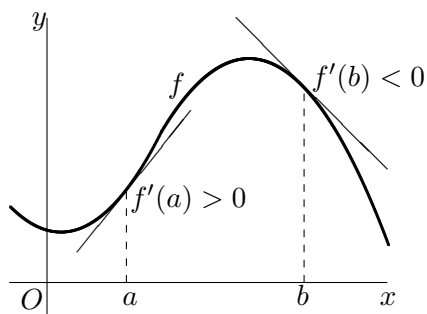
$$f'(a) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \implies \text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo}(x - a) \\ < 0 \implies \text{signo}(f(x) - f(a)) \neq \text{signo}(x - a) \end{array} \right\} \text{ en un entorno de } a$$

con lo que se tiene el siguiente resultado:

##### 3.2.1. Condiciones suficientes de crecimiento local

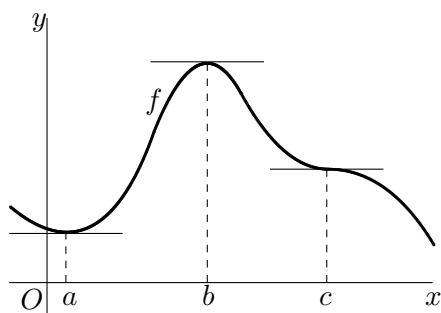
Si  $f$  es una función derivable en  $a$ , entonces:

- $f'(a) > 0 \implies f$  es creciente en  $a$
- $f'(a) < 0 \implies f$  es decreciente en  $a$



- ◊ pendiente positiva  $\implies$  función creciente
- ◊ pendiente negativa  $\implies$  función decreciente

En los puntos donde la derivada se anula, llamados **puntos críticos**, la función puede ser creciente, decreciente o presentar un extremo relativo (máximo o mínimo):



- ◊  $f'(a) = 0$  y  $f$  tiene mínimo relativo en  $a$
- ◊  $f'(b) = 0$  y  $f$  tiene máximo relativo en  $b$
- ◊  $f'(c) = 0$  y  $f$  es decreciente en  $c$

##### 3.2.2. Criterio de la derivada primera para extremos relativos

Sea  $f$  derivable en un entorno de  $a$  con  $f'(a) = 0$ , y sea  $\delta > 0$ . Entonces:

- $f'(x) > 0$  antes y después de  $a$  (cuando  $0 < |x - a| < \delta$ )  $\implies f$  es creciente en  $a$
- $f'(x) < 0$  antes y después de  $a$  (cuando  $0 < |x - a| < \delta$ )  $\implies f$  es decreciente en  $a$
- $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ antes de } a \text{ (cuando } a - \delta < x < a) \\ f'(x) < 0 \text{ después de } a \text{ (cuando } a < x < a + \delta) \end{array} \right. \implies f \text{ tiene un máximo relativo en } a$
- $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ antes de } a \text{ (cuando } a - \delta < x < a) \\ f'(x) > 0 \text{ después de } a \text{ (cuando } a < x < a + \delta) \end{array} \right. \implies f \text{ tiene un mínimo relativo en } a$

Para que una función  $f$  dos veces derivable tenga un máximo relativo en  $a$  es necesario que  $f'(a) = 0$  y que  $f'(x)$  pase de ser positiva antes de  $a$  a ser negativa después de  $a$ , es decir, es necesario que la función derivada  $f'$  sea decreciente en  $a$ , lo que se asegura si  $f''(a) < 0$ . Análogamente, la existencia de mínimo relativo se asegura si  $f'$  es creciente en  $a$ , lo que se asegura si  $f''(a) > 0$ .

### 3.2.3. Criterio de la derivada segunda para extremos relativos

Si  $f$  es una función dos veces derivable en  $a$  con  $f'(a) = 0$ , entonces:

- $f''(a) < 0 \implies f$  tiene máximo relativo en  $a$
- $f''(a) > 0 \implies f$  tiene mínimo relativo en  $a$

### 3.2.4. Observaciones

1. Para saber si una función derivable en un punto es creciente, decreciente o presenta extremo relativo (máximo o mínimo) basta con la derivada primera. Sólo se debe recurrir a la derivada segunda cuando sea muy fácil de hallar.
2. Una función también puede alcanzar extremos relativos en puntos donde no sea derivable. Por tanto, para hallar todos los extremos relativos de una función hay que estudiar los puntos críticos (donde  $f'(x) = 0$ ) y los puntos del dominio donde la función no es derivable.

### 3.2.5. Intervalos de crecimiento

Son los intervalos donde una función es siempre creciente o siempre decreciente. Los intervalos de crecimiento son aquellos en que queda dividido el dominio de la función por sus puntos críticos y los puntos donde no es derivable.

### 3.2.6. Extremos absolutos de una función

Para hallar los extremos absolutos de una función hay que comparar los extremos relativos con los valores de la función en los puntos donde no es derivable y en los extremos del dominio (o su límite cuando no está definida en ellos)

### 3.2.7. Ejemplos

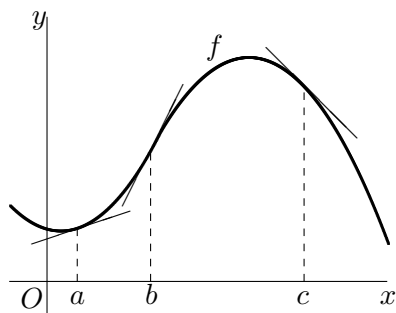
Estudia el crecimiento y halla los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$       (b)  $f(x) = \ln \sqrt{2x^3 + 3x^2}$       (c)  $f(x) = \begin{cases} |x| & , \text{ si } -2 \leq x \leq 1 \\ x + 3 & , \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

### 3.2.8. Concavidad y convexidad

Sea  $f$  una función derivable en  $a$ . Se dice que la función

- es **convexa** en  $a$  si su gráfica está por encima de la tangente en  $a$  en un entorno de dicho punto.
- es **cóncava** en  $a$  si su gráfica está por debajo de la tangente en  $a$  en un entorno de dicho punto.
- tiene un **punto de inflexión** en  $a$  si su gráfica está por encima de la tangente en  $a$  a un lado del punto y por debajo al otro.



- ◇  $f$  es convexa en  $a$
- ◇  $f$  tiene un punto de inflexión en  $b$
- ◇  $f$  es cóncava en  $c$

Es fácil observar (véase la figura anterior) que, si  $f$  es derivable, en un punto de convexidad la función derivada (pendiente) es creciente, en un punto de concavidad es decreciente y en un punto de inflexión pasa de creciente a decreciente o viceversa. Puesto que el crecimiento de la función derivada se caracteriza con la derivada segunda, se tiene el siguiente resultado:

### 3.2.9. Criterio de la derivada segunda para la concavidad

Si  $f$  es derivable dos veces en un entorno de  $a$ , entonces:

- $f''(a) > 0 \implies f$  es convexa en  $a$
- $f''(a) < 0 \implies f$  es cóncava en  $a$
- $f''(a) = 0$  y  $\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ alrededor de } a \implies f \text{ es convexa en } a \\ f''(x) < 0 \text{ alrededor de } a \implies f \text{ es cóncava en } a \\ f''(x) \text{ cambia de signo al pasar por } a \implies f \text{ tiene un punto de inflexión en } a \end{cases}$

Cuando  $f''(a) = 0$ , el cambio de signo de  $f''(x)$  al pasar por  $a$  viene asegurado por su crecimiento o decrecimiento en dicho punto y, puesto que el crecimiento de la derivada segunda se caracteriza con la derivada tercera:

### 3.2.10. Condición suficiente para punto de inflexión

Si  $f$  es una función tres veces derivable en  $a$  con  $f''(a) = 0$ , entonces:

$$f'''(a) \neq 0 \implies f \text{ tiene un punto de inflexión en } a$$

### 3.2.11. Observación

Para saber si una función derivable en un punto es convexa, cóncava o tiene un punto de inflexión basta con la derivada segunda. Sólo se debe recurrir a la derivada tercera cuando sea muy fácil de hallar.

### 3.2.12. Intervalos de concavidad

Son los intervalos donde una función es siempre convexa o siempre cóncava. Los intervalos de concavidad son aquellos en que queda dividido el dominio de la función por los puntos donde su derivada segunda se anula o no existe.

### 3.2.13. Ejemplos

Estudia la concavidad y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$(b) f(x) = \ln \sqrt{2x^3 + 3x^2}$$

### 3.2.14. Representación gráfica de funciones

Para obtener una buena representación gráfica de una función  $y = f(x)$  se deben estudiar todos o algunos de los siguientes epígrafes:

1. Dominio, periodicidad y simetrías.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Asíntotas.
4. Crecimiento y extremos relativos.
5. Concavidad y puntos de inflexión.

### 3.2.15. Ejemplos

Representa gráficamente las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

(b)  $f(x) = \ln \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

### 3.2.16. Problemas de optimización

Una aplicación muy importante del cálculo de derivadas es la resolución de problemas de optimización, es decir, problemas relativos a hallar un extremo absoluto (máximo o mínimo) de una función en un cierto dominio.

### 3.2.17. Ejemplos

1. Con una plancha de cartón rectangular de 3 metros de larga y 2 metros de ancha se desea construir una una caja sin tapa de volumen máximo. Halla las dimensiones de la caja.
2. Se desea construir un recipiente cerrado en forma de cilindro con capacidad para un litro. Calcula las dimensiones del que tiene área total mínima.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentra los extremos absolutos de las funciones:

(a)  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x^3 - 12x + 2 & , \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

(b)  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4, \quad 0 \leq x \leq 2$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

(a)  $y = \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)^2}$

(c)  $y = xe^{\frac{1}{x}}$

(e)  $y = \ln(x^3 - 3x + 2)$

(b)  $y = (x^2 - 4)^{2/3}$

(d)  $y = x^2e^{-x}$

(f)  $y = \sqrt[3]{x^2(1 - x)}$

3. Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, con un lado apoyado sobre la hipotenusa.
4. Un faro está situado 3 km mar adentro, directamente enfrente de un punto  $A$  de la costa que es recta. En la costa, a 5 km del punto  $A$ , hay un almacén. El farero puede remar en su bote a 4 km/h y puede caminar a 6 km/h. ¿Hacia qué punto de la costa debe el farero dirigir su bote para llegar al almacén lo antes posible?
5. Determina la mínima distancia entre la recta  $y = x - 3$  y la parábola  $y = x^2$ .
6. La tangente por un punto  $P$  del primer cuadrante, a la gráfica de la función  $f(x) = e^{-x}$ , determina un triángulo rectángulo con los ejes coordenados. Halla el punto  $P$  para el cuál el área del triángulo es máxima.
7. Halla la altura y el radio del cilindro circular recto de mayor volumen contenido en la esfera de radio  $\sqrt{3}$ .
8. Halla la longitud de la escalera más larga que puede transportarse horizontalmente a través de un pasillo en forma de ángulo recto, si la anchura del pasillo a un lado del ángulo es 1 metro y al otro 2 metros.
9. Una pista de atletismo se construye añadiendo semicírculos en dos lados opuestos de un rectángulo. Encuentra las dimensiones de la pista de 400 metros que encierra área máxima.
10. Demuestra que  $e^x \geq 1 + x$ , para todo número real  $x$ .

## CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones sobre una función  $f$  infinitamente derivable en un intervalo:
  - (a) Entre dos intervalos sucesivos con crecimiento distinto hay un extremo relativo.
  - (b) Si  $f$  es par, entonces  $f$  tiene un extremo relativo en  $x = 0$ .
  - (c) Si  $f$  tiene un máximo relativo entonces alcanza el máximo absoluto en el intervalo.
  - (d) Si  $f$  tiene un único extremo relativo que es mínimo alcanza el mínimo absoluto en dicho intervalo.
  - (e) Si  $f$  alcanza un máximo relativo en  $a$ , entonces  $f'(a) = 0$  y  $f''(a) < 0$ .
  - (f) Si  $f$  es convexa entonces  $f'$  es creciente.
  - (g) Entre dos intervalos sucesivos con concavidad distinta hay un punto de inflexión.
  - (h) Si  $f$  tiene un punto de inflexión en  $a$ , entonces  $f''(a) = 0$  y  $f'''(a) \neq 0$ .
  - (i) Si  $f$  tiene un punto de inflexión en  $a$ , entonces  $f'(a) = f''(a) = 0$ .

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla los extremos locales de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , y prueba que son absolutos.
2. Prueba que la función  $f(x) = \frac{x+1}{1+x^2}$  posee tres puntos de inflexión situados sobre una recta. Dibuja su gráfica.
3. Representa gráficamente las siguientes funciones:
 

(a) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$	(c) $y = xe^{-x^2}$	(e) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$	(g) $y = \sqrt{ x^2-1 }$
(b) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$	(d) $y = x^2e^{1/x}$	(f) $y = \frac{x}{\ln x}$	(h) $y = \frac{1}{ x-1 } - \frac{1}{ x+1 }$
4. La suma de dos números no negativos es 36. Halla dichos números si: (a) la diferencia entre sus raíces cuadradas positivas es lo mayor posible; (b) la suma de sus raíces cuadradas positivas es lo mayor posible.
5. Determina las dimensiones del bote cilíndrico cerrado de volumen  $V$  cuya superficie lateral es mínima.
6. Determina las dimensiones del cilindro cerrado de área  $A$  cuyo volumen es máximo.
7. Se quiere construir una caja rectangular abierta a partir de una pieza de cartón de dimensiones  $a$  y  $b$ ,  $a \leq b$ . Para ello se corta en cada una de las esquinas un cuadrado y se doblan hacia arriba las solapas resultantes. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado que se corta para que la capacidad de la caja sea máxima?
8. Demuestra que  $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ , para todo  $x \geq 0$ .