3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

3.1. LA DERIVADA

3.1.1. Derivada de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **derivable** en a si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

que se llama **derivada** de f en a, y se representa por $f'(a)$.

Haciendo el cambio de variable $x = a + h$ en el límite, se obtiene otra expresión para la derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$ en a son: $y'(a)$, $Df(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $\frac{dy}{dx}(a)$, ...

Intuitivamente, una función es derivable en un punto si su gráfica se traza alrededor del punto de forma suave, es decir, sin cambios bruscos de dirección.

3.1.2. Ejemplo

Halla la derivada de la función $y = 1/x$ en $x = 1$.

3.1.3. Derivada y continuidad

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto, pues una función puede ser continua y no derivable en un punto.

Demostración: Si f es derivable en a, entonces existe el límite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y, puesto que el denominador tiende a cero también lo ha de hacer el numerador, en cuyo caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y la función es continua en a.

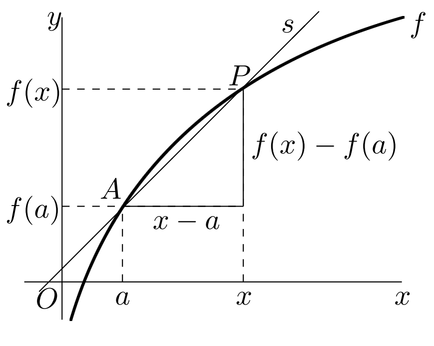
El recíproco no es cierto pues, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & , \text{si } x \to 0^- \\ 1 & , \text{si } x \to 0^+ \end{cases} \implies \text{no existe el límite} \implies \text{no existe } f'(0)$$

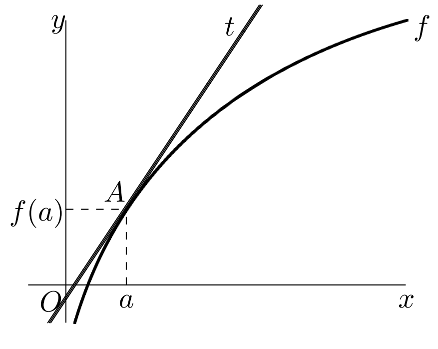
Observación: Como consecuencia de lo anterior, si una función no es continua en un punto no puede ser derivable en dicho punto. Por tanto, antes de estudiar la derivabilidad de una función, se debe estudiar la continuidad.

3.1.4. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de f en a es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a, que se conoce como **pendiente** de f en a.



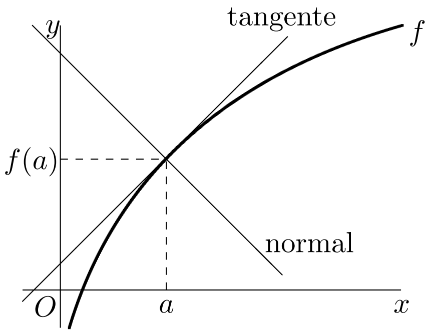
$$x \to a$$
$$\Downarrow$$
$$P \to A$$
$$\Downarrow$$
secante $s \to$ tangente t
$$\Downarrow$$



Pendiente de la secante: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$ Pendiente de la tangente: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

3.1.5. Rectas tangente y normal a una curva

Sea f una función derivable en a. Puesto que la derivada coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica, y la recta normal a una curva es la perpendicular a la tangente, se tiene que:



Recta tangente a f en a: $\quad y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Recta normal a f en a: $\quad y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$
(si $f'(a) \neq 0$)

3.1.6. Ejemplo

Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x+2}$ *en* $x = -3$.

3.1.7. Derivadas laterales

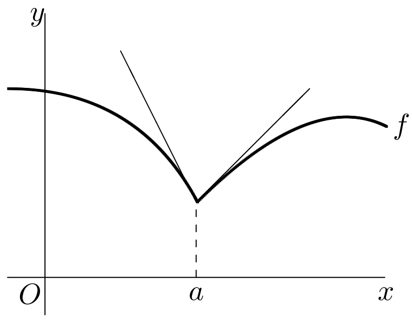
La no existencia de derivada, o del límite que en ella aparece, se debe con frecuencia a que los límites laterales son distintos. En estos casos, como en los que la función sólo está definida a uno de los lados del punto, tiene sentido definir:

Derivada lateral por la derecha: $\quad f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Derivada lateral por la izquierda: $\quad f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Obviamente, una función definida en un entorno de un punto es derivable si y sólo si existen las derivadas laterales y ambas coinciden.

Cuando existen las derivadas laterales pero no coinciden, la función no es derivable. En este caso, la gráfica de la función no tiene tangente en el punto, pero sí tiene tangentes laterales y se dice que presenta un **punto anguloso**.



Cuando la función está definida en el extremo de su intervalo de definición, se llama derivada en ese punto a la derivada lateral correspondiente.

3.1.8. Derivada de una función definida a trozos en los puntos cambio

Si g y h son derivables en a y $g(a) = h(a)$, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{si } x \leq a \\ h(x) & , \text{si } x > a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(a^-) = g'(a) \\ f'(a^+) = h'(a) \end{cases}$$

como queda de manifiesto usando la definición:

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a^-) = g'(a)$$

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a^+) = h'(a)$$

3.1.9. Derivadas de operaciones con funciones

Si f y g son derivables en a, entonces también son derivables en a, y su derivada es la que se indica, las siguientes funciones:

$$(kf)'(a) = kf'(a)\ ,\quad k \in \mathbb{R} \qquad (fg))'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$$

siempre que, en el caso de los cocientes, $g(a) \neq 0$.

3.1.10. Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena

Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \qquad \textbf{(regla de la cadena)}$$

Demostración: Al ser f derivable en a, f es continua en a y, por tanto, $f(x) \to f(a)$ cuando $x \to a$. Entonces:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a))f'(a)\end{aligned}$$

3.1.11. Derivada de la función inversa

Si f es una función invertible y derivable en a con $f'(a) \neq 0$, entonces su función inversa f^{-1} es derivable en $f(a) = b$ y su derivada es

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

3.1.12. Función derivada. Derivadas sucesivas

Dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama **función derivada** a aquella función que en cada punto nos da, si existe, el valor de la derivada de f, y se representa por f'.

$$\begin{aligned} f' : D' &\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{con } D' \subset D \\ x &\longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Puesto que la función derivada es una nueva función, se puede volver a derivar para obtener la derivada segunda (o de orden 2) de f, y así sucesivamente:

$$f''(x) = \left(f'\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}\ ; \quad f''' = \left(f''\right)'\ ; \quad f^{iv} = \left(f'''\right)'\ ; \quad f^{v}\ ; \quad f^{vi}\ ; \ldots\ ; f^{n)}\ ; \ldots$$

Se dice que f es una **función de clase n** en D si admite y son continuas hasta la derivada de orden n en D. El conjunto de todas las funciones de clase n en D se representa por $\mathcal{C}^n(D)$.

3.1.13. Ejemplo

Halla todas las funciones derivadas de $y = x^3 - 2x + 1$.

3.1.14. Tabla de derivadas elementales

A partir de la definición de derivada y de las derivadas de operaciones con funciones, regla de la cadena y función inversa, se pueden hallar todas las derivadas que aparecen en la siguiente tabla de derivadas elementales:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
k	0		$\ln x$	$\frac{1}{x}$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x^p \quad (p \neq 0)$	px^{p-1}		$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$		$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$		$\sin x$	$\cos x$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x		$\cos x$	$-\sin x$		$\sinh x$	$\cosh x$
a^x	$a^x \ln a$		$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$		$\cosh x$	$\sinh x$

3.1.15. Notación diferencial

Otra notación para las funciones derivadas, llamada **notación diferencial**, es la siguiente:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \ ; \ y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \ ; \ y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \ ; \ \ldots ; \ y^{n)} = f^{n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \ ; \ldots$$

Esta notación es muy útil al usar la regla de la cadena:

$$y = g \circ f(x) \implies y = g(u) \ , \ \text{con} \ u = f(x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$y = h \circ g \circ f(x) \implies y = h(w) \ , \ y = g(u) \ , \ u = f(x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

y también en el cálculo de la derivada de la función inversa:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

3.1.16. Ejemplo

1. *Usa la regla de la cadena para hallar las derivadas de las funciones:* **(a)** $y = \sin x^2$; **(b)** $y = e^{\sin^2 x}$.

2. *A partir de la derivada de $y = \sin x$, obtén la derivada de $y = \arcsin x$.*

3.1.17. Derivación implícita y logarítmica

- Cuando una función viene definida implícitamente, por ejemplo:

$$x^2y + 2xy^3 = 3x - 1$$

  su derivada se puede obtener directamente derivando los dos miembros de la expresión anterior. Para ello se usa la regla de la cadena y se tiene en cuenta que, al ser y función de x, su derivada es y'. En el ejemplo, al derivar se obtiene:

$$2xy + x^2y' + 2y^3 + 6xy^2y' = 3 \implies (x^2 + 6xy^2)y' = 3 - 2xy - 2y^3 \implies y' = \frac{3 - 2xy - 2y^3}{x(x + 6y^2)}$$

  En general, se puede usar la siguiente fórmula:

$$f(x, y) = 0 \implies \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0 \implies y' = \frac{-\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

- Para hallar la derivada de una función potencio-exponencial $y = f(x)^{g(x)}$ se procede así:

  1. Se toman logaritmos eliminando la potencia: $\ln y = g(x)\ln f(x)$.

  2. Se deriva implícitamente: $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$.

  3. Se despeja la derivada: $y' = \left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] f(x)^{g(x)}$.

  Esta técnica, llamada derivación logarítmica, se usa también para hallar derivadas de ciertas expresiones muy complicadas.

3.1.18. Ejemplos

1. *La expresión $y^3 - x^2 = 4$ define implícitamente a la y como función de x. Halla sus dos primeras derivadas.*

2. *Halla las derivadas de las funciones:* **(a)** $y = x^{\sin x}$; **(b)** $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x}}$.

3.1.19. Fórmula de Leibniz

Derivando sucesivamente el producto $y = f(x)g(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
y' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\
y'' &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'x) + f(x)g''(x)\\
y''' &= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x)\\
&\vdots\\
y^{n)} &= \binom{n}{0}f^{n)}(x)g(x) + \binom{n}{1}f^{n-1)}(x)g'(x) + \binom{n}{2}f^{n-2)}(x)g''(x) + \ldots + \binom{n}{n}f(x)g^{n)}(x) =\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{n-k)}(x)g^{k)}(x) \qquad \textbf{(fórmula de Leibniz)}
\end{aligned}$$

3.1.20. Ejemplo

Calcula, usando la fórmula de Leibniz, las tres primeras derivadas de la función: $y = \frac{x^4}{1-x}$.

3.1.21. Interpretación física de la derivada. Aplicaciones

Si $x(t)$ representa el espacio recorrido por un móvil en el instante t, su derivada es, como conoces de Física, la velocidad instantánea del móvil en dicho instante:

$$x'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v(t)$$

y la derivada de la velocidad es la aceleración: $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

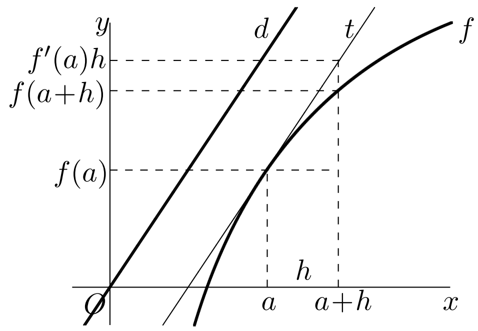
En general, la derivada de $y = f(x)$ es la **velocidad** con que varía y respecto de x.

3.1.22. Ejemplos

1. *Un objeto se mueve sobre el eje de abscisas y su posición en cada instante viene dada por $x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 27$. Describe su movimiento en el intervalo de tiempo $0 \le t \le 9$.*

2. *Un globo esférico se expande creciendo su radio a razón de 2cm/min. ¿Con qué rápidez crece el volumen de globo cuando su radio es de 5cm?*

3.1.23. Aproximación de una función. La diferencial



Si f es derivable en a, entonces:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y, por tanto:

$$f(a+h) - f(a) \simeq f'(a)h \quad \text{cuando} \quad h \simeq 0$$

de donde, llamando x a $a+h$, se obtiene la fórmula para obtener **valores aproximados**:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{cuando} \quad x \simeq a$$

Se llama **diferencial** de la función f en a a la función lineal:

$$\begin{aligned} df \,:\, \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longrightarrow df(h) = f'(a)h \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es la recta d que pasa por el origen y es paralela a la tangente a la gráfica de f en a (véase figura).

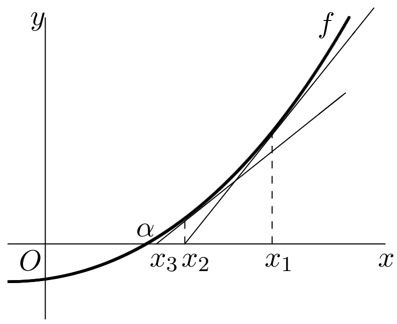
3.1.24. Ejemplos

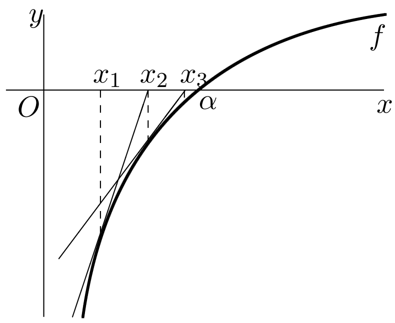
1. *Usando la función $f(x) = \sqrt{x}$, halla un valor aproximado de $\sqrt{102}$.*

2. *Los beneficios acumulados por una empresa a los t años de su fundación vienen dados por $B(t) = \frac{2t^2}{t+4} - 4$, en miles de euros. Usa la derivada para hallar los beneficios aproximados de la empresa durante el año doceavo después de su fundación.*

3.1.25. El método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces

Es un método iterativo para el cálculo aproximado de raíces de una ecuación $f(x) = 0$, y se ilustra en la figura:





Para aproximar la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$, se parte de un punto próximo x_1 y se construye la sucesión $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ donde x_{n+1} es el punto de corte con el eje de abscisas de la tangente a la gráfica de f en $x = x_n$, es decir:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \underset{y=0}{\Longrightarrow} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La sucesión converge muy rápidamente a la raíz siempre que, como en los casos de la figura, se cumpla que $f(x)f''(x) > 0$ en (α, x_1) o en (x_1, α).

3.1.26. Ejemplo

Usa el método de Newton-Raphson para hallar un valor aproximado de la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 3 = 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x\,|x|$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , \text{si } x > 0 \\ 2x^3 & , \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ **(c)** $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \text{si } x > 0 \\ x^2-1 & , \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad en $x = 0$ de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Haz un esbozo de sus gráficas.

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = \dfrac{x^2}{(2x-1)^3}$ **(c)** $y = \sin^2 2x$ **(e)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ **(g)** $y = \ln\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(b) $y = \ln(\ln x)$ **(d)** $y = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ **(f)** $y = \sin(\sin(\sin x))$ **(h)** $y = \arctan\left(\tan^2 x\right)$

4. Halla la función derivada, y estudia su continuidad, de:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \left|1 - x^2\right|$$

5. Determina a, b y c para que sea derivable la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \text{si } 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & , \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 - x & , \text{si } x > 3 \end{cases}$$

6. Calcula, mientras existan, las derivadas sucesivas de $f(x) = |x|^3$ en $x = 0$.

7. Halla la derivada de y respecto de x en las siguientes expresiones implícitas:

(a) $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$ **(b)** $\arctan \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$

8. Halla la derivada segunda de y respecto de x en cada una de las siguientes expresiones implícitas:

(a) $x^2 - y^2 = 2$ **(b)** $xy = \tan x^2 y^2$

9. Halla la ordenada y las dos primeras derivadas (de y respecto de x) en el punto de abscisa $x = 2$ de la curva de ecuación $x^2 + 4xy + y^3 + 5 = 0$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en dicho punto?

10. Halla la ecuación de la recta normal a la curva $x^2 + 2xy = y^3$ en el punto $(1, -1)$.

11. Halla todos los puntos con tangente vertical de la cardioide: $\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = \sqrt{x^2+y^2} + x$.

12. Halla la derivada de la función $y = (1+x)^{\ln(1+x)}$.

13. Halla la derivada de orden 25 de la función $y = x^2 e^{-x}$.

14. Halla la función derivada de $f(x) = \arctan \frac{\sin x}{1+\cos x}$, y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $x = \pi/2$.

15. Determina el ángulo que forman las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x^3 - 3$ en sus puntos de corte.

16. Halla a, b y c para que sea máximo el orden de contacto de las funciones $f(x) = x^4 + 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = ax^2 + bx + c$ en $x = 0$. ¿Cuál es dicho orden?

17. Una explosión proyecta hacia arriba diversos escombros con una velocidad inicial de 25 metros por segundo. **(a)** ¿En cuántos segundos alcanzarán su altura máxima? **(b)** ¿Cuál es esa altura máxima? **(c)** ¿Cuál es su aceleración cuando alcanzan una altura, subiendo y bajando, de 10 metros?

18. Una copa en forma de cono invertido, de 12 centímetros de diámetro superior y 9 centímetros de altura, está llena de agua. La copa pierde agua por el vértice inferior a razón de 2 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué velocidad está bajando el nivel del agua en el instante en que tiene 4 centímetros de profundidad?

19. Un barco navega por el océano con rumbo sur y dirección hacia puerto a una velocidad de 40 km/h. Otro barco se aleja del puerto en dirección oeste a una velocidad de 20 km/h. Al mediodía, el primer barco se halla a 150 km del puerto y el segundo a 65 km. ¿A qué ritmo cambia la distancia entre los dos barcos? Comprueba si se acercan o se alejan entre sí.

20. Una partícula se mueve sobre la curva $y = \cos(1+2x)$, siendo su abscisa $x(t) = t^2+1$ en el instante de tiempo t. ¿Con qué velocidad se desplaza en las direcciones horizontal y vertical en $t = 2$?

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Una función continua en un intervalo es derivable en todos sus puntos del interior.

(b) Una función es derivable en un punto si es continua y existen sus derivadas laterales en el punto.

(c) Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en el punto.

(d) Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en el punto.

(e) La función derivada es siempre continua.

(f) Los polinomios admiten infinitas derivadas.

(g) Si una función es derivable infinitas veces, entonces es un polinomio.

2. Demuestra que si $(x-a)^2$ es un factor del polinomio $p(x)$, entonces $x - a$ es un factor de $p'(x)$.

3. Sea f una función derivable en toda la recta real. Demuestra que si f es par (impar) entonces f' es impar (par).

4. Sea f una función continua que verifica: $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|^2$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, con $k > 0$. Demuestra que f es constante.

5. Usando la fórmula de la derivada de la función inversa, halla la derivada de las siguientes funciones: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arcsinh} x$, $y = \operatorname{arccosh} x$ e $y = \operatorname{arctanh} x$.

6. Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que $f(0) = g(0) = 0$. Demuestra que es imposible la igualdad $f(x)g(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en el punto que se indica:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$, en $x = 0$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & , \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, en $x = 1$

2. Halla las derivadas de las funciones hiperbólicas (seno, coseno y tangente).

3. Halla las siguientes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}(x - x^2)\right]$ **(b)** $\frac{d^2}{dx^2}\left[(x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(x + x^{-1})\right]$ **(c)** $\frac{d^3}{dx^3}\left[\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 5x^2)\right]$

4. Halla la función derivada, y estudia su continuidad, de $f(x) = \left|x^3 - 4x\right|$.

5. Halla a y b para que sea derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ ax + b & , \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

6. Estudia la derivabilidad de la función $y = \sqrt{x+1}\,\arccos(x + 1)$.

7. Halla la derivada de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}$ $g(x) = u\left[v(x) \sin v(x)\right]$ $h(x) = u\left[v(x) + w(v(x))\right]$

8. Calcula, mientras existan, las derivadas sucesivas de $f(x) = |x|^3$ en $x = 0$.

9. Calcula y simplifica la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = 2x \arctan x - \ln\sqrt{1 + 4x^2}$ **(b)** $y = \ln\dfrac{1 + 2\tan x}{2 + \tan x}$ **(c)** $y = (1 + x)^{\ln(1+x)}$

10. Halla la derivada de y respecto de x en las siguientes expresiones implícitas:

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ **(b)** $x + \sin y = xy$ **(b)** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

11. Halla la derivada segunda de y respecto de x en cada una de las siguientes expresiones implícitas:

(a) $7x + 5y^2 = 1$ **(b)** $4x^2 - 3y^2 = 9$

12. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto que se indica:

(a) $x^2 + y^2 = 13$, en $(-2, 3)$ **(c)** $\sin(x - y) = xy$, en $(0, \pi)$

(b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2y$, en $(1, 1)$ **(d)** $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$, en $(2, 1)$

13. Halla el ángulo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

14. Halla la derivada de la función $y = x + x^x + x^{x^x}$.

15. Sea $f : [2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$. Halla $\left(f^{-1}\right)'(27)$.

16. Calcula el orden de contacto de las funciones $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 - x + 2$ en $x = 1$.

17. Estudia el movimiento de un objeto que se mueve, a partir del instante $t = 0$, sobre un eje donde su posición viene dada en cada instante por la ecuación:

(a) $x(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$ **(b)** $x(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 6t - 5$

18. Se deja caer una piedra desde una altura de 500 metros. ¿Cuántos segundos tardará en alcanzar el suelo? ¿Cuál es su velocidad en el momento del impacto?

19. La superficie total de un cilindro circular recto de radio r y altura h viene dada por la fórmula $A = 2\pi r(r+h)$. Halla la velocidad de variación de: **(a)** A respecto de h cuando r permanece constante; **(b)** A respecto de r cuando h permanece constante; y **(c)** de h respecto de r cuando A permanece constante.

20. La arista de un cubo decrece a una velocidad de 3 centímetros por segundo. ¿Cómo cambia el volumen del cubo cuando la arista mide 10 centímetros?

21. Un balón se infla de tal forma que su volumen crece a razón de $36\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{seg}$. Halla la velocidad de crecimiento de radio cuando mide $3\,\mathrm{cm}$.

22. Una partícula se mueve en la órbita circular $x^2+y^2=1$. Cuando pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ su ordenada disminuye a razón de 3 unidades por segundo. ¿Con qué rapidez varía su abscisa?

23. Una nave espacial se lanza verticalmente, siendo $h = 15t^2$ metros su altura a los t segundos del lanzamiento. Para un observador que se encuentra a un kilómetro del lugar del lanzamiento, ¿a qué ritmo cambia el ángulo de elevación de la nave 10 segundos después del despegue?

24. Un depósito con forma de cono invertido se llena a razón de 250 l/min. La altura del depósito es de $7,5$ m y el radio de la parte superior de $3,5$ m ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m? ¿Y cuando el agua se desborda?

25. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ cambia de valor cuando x pasa de valer $0,5$ a valer $0,6$. Calcula: **(a)** el incremento exacto Δf que se produce en el valor de la función; **(b)** el valor de la diferencial df en $0,5$ con un incremento $h = \Delta x = 0,1$; **(c)** el error cometido al estimar Δf mediante df.

26. Estima, mediante diferenciales, los valores de las siguientes expresiones: (a) $\sqrt[3]{1010}$; (b) $33^{3/5}$.

27. El diámetro de una bola de acero mide 16 centímetros con un error máximo de $0,3$ centímetros. Calcula mediante diferenciales el error máximo cometido en el cálculo de su superficie ($S = 4\pi r^2$) y en el cálculo de su volumen ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

28. Un avión se desplaza en vuelo horizontal a $8\,\mathrm{km}$ de altura (se supone la Tierra plana). La ruta de vuelo pasa por la vertical de un punto P del suelo. La distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de $4\,\mathrm{km/min}$ en el instante en que esta distancia es de $10\,\mathrm{km}$. Calcula la velocidad del avión en ese instante (en km/h).

29. Halla la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ alrededor del punto $x = 0$. ¿Qué relación existe con las linealizaciones de las funciones $y = \sqrt{x+1}$ e $y = \sin x$ alrededor de dicho punto?

30. Aplicando el método de Newton-Raphson a partir del punto que se indica, halla una raíz aproximada de cada una de las siguientes ecuaciones, justificando la aproximación obtenida.

(a) $x^3 - 4x + 1 = 0\ ,\quad x_1 = 2$ **(b)** $\cos x = x\ ,\quad x_1 = 1$