2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.3. CONTINUIDAD

2.3.1. Continuidad de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **continua** en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, lo que equivale a que se cumplan las tres condiciones siguientes:

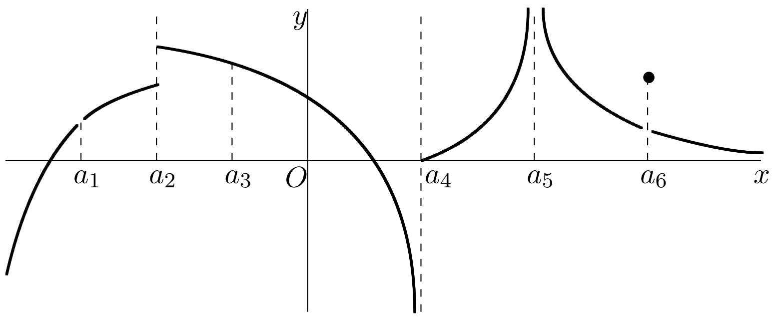
1. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es finito **2.** $\exists f(a)$ **3.** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Intuitivamente, una función es continua en un punto cuando su gráfica se puede trazar alrededor del punto sin levantar el lápiz del papel.

2.3.2. Tipos de discontinuidad

Si una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad** en el punto, que puede ser:

- **evitable** si existe y es finito el límite de la función en el punto.
- **esencial** si no existe o es infinito alguno de los límites laterales de la función en el punto.
- **de salto** si existen y son finitos los dos límites laterales de la función en el punto.

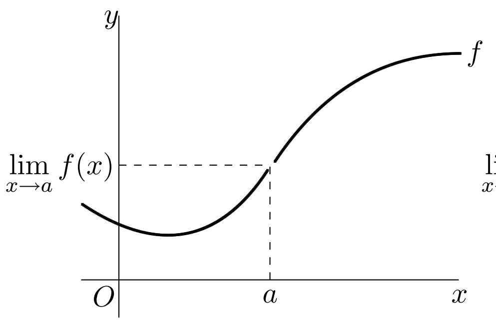


- Continua en a_3
- Discontinuidad evitable en a_1 y a_6
- Discontinuidad esencial en a_4 y a_5
- Discontinuidad de salto en a_2

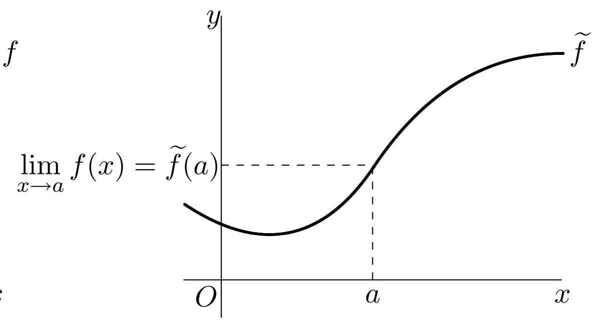
Cuando una función presenta una discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para convertirla en una función continua. Concretamente, si f tiene una discontinuidad evitable en a, la función:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & , \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en a, y sólo se diferencia de f por su valor en el punto.



f tiene una discontinuidad evitable en a



$\widetilde{f}$ es continua en a

2.3.2. Ejemplos

Estudia en qué puntos son continuas y en cuáles discontinuas cada una de las siguientes funciones:

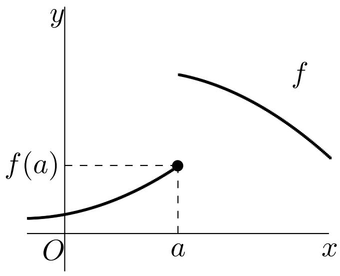
(a) $f(x) = x^2 - 1$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **(c)** $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

2.3.3. Continuidad lateral

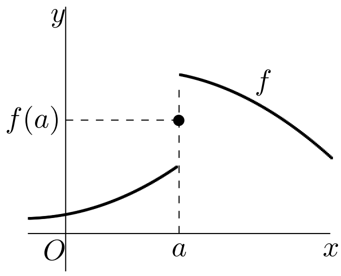
Cuando el límite de la función en el punto no existe, pero alguno de los límites laterales coincide con el valor de la función se obtiene lo que se llama continuidad lateral.

- Se dice que f es **continua por la izquierda** en a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- Se dice que f es **continua por la derecha** en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

La continuidad lateral cobra especial significado en los extremos de los intervalos de definición y en los puntos donde cambian de expresión las funciones definas a trozos.
Obviamente, una función es continua en un punto si y sólo si es continua por la derecha y por la izquierda.



f es continua en a por la izquierda y no lo es por la derecha.



f no es continua en a ni por la izquierda ni por la derecha.

2.3.4. Continuidad en intervalos

Una función es continua en un intervalo cuando lo es en cada uno de los puntos del intervalo, entendiéndose continuidad lateral en los extremos del mismo (por la derecha en el extremo de la izquierda y por la izquierda en el extremo de la derecha).

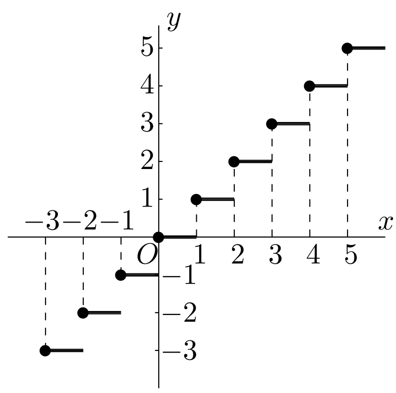
2.3.5. Ejemplo

La función parte entera:

$$E(x) = \lfloor x \rfloor$$

es continua en cada punto $a \notin \mathbb{Z}$, y continua por la derecha en cada punto $n \in \mathbb{Z}$.
Globalmente, es continua en cada intervalo:

$$[n, n+1)\,,\ \ n \in \mathbb{Z}$$



2.3.6. Propiedades de la continuidad

1. Si f y g son dos funciones continua en a, entonces las funciones $f \pm g$ y $f \cdot g$ son continuas en a. Además, si $g(a) \neq 0$ la función f/g es también continua en a.
2. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Demostración:

1. Se deducen fácilmente a partir de las propiedades de los límites:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a) \implies f+g \text{ es continua en } a$$

y análogamente las otras.

2. Si f es continua en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, lo que equivale a decir que si $x \to a$ entonces $f(x) \to f(a)$, y si g es continua en $f(a)$, $\lim\limits_{u\to f(a)} g(u) = g(f(a))$. Entonces:

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{f(x)\to f(a)} g(f(x)) = \lim_{u\to f(a)} g(u) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$$

es decir, $g \circ f$ es continua en a.

2.3.7. Continuidad de las funciones elementales

De las propiedades de los límites y de la continuidad, se puede deducir que todas las funciones elementales son continuas en su dominio de definición.

2.3.8. Ejemplos

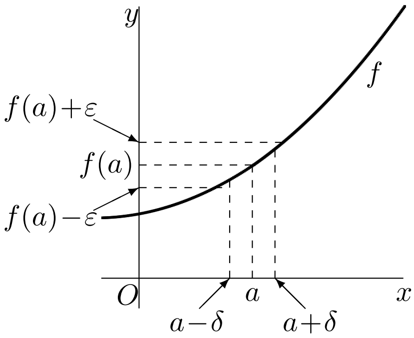
Estudia la continuidad (clasificando sus discontinuidades) de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}(x-1)}{\left(1+3^{1/x}\right)\left(2x^2-3x+1\right)}$ **(b)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{|x-2|}\right)\dfrac{\sin x}{x^2+x}e^{\frac{-1}{|x-1|}}$

2.3.9. Definición $\varepsilon-\delta$ de continuidad

Usando la definición formal de límite para indicar que el límite coincide con el valor de la función, se obtiene la siguiente definición de continuidad:

$$f \text{ es } \textbf{continua} \text{ en } a \iff (\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que: } |x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon)$$



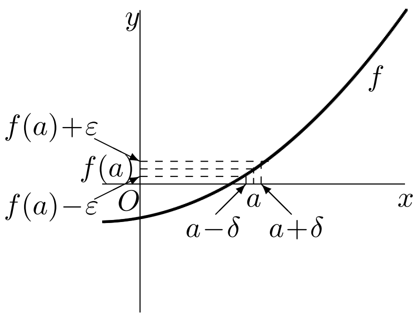
- Si x dista de a menos que δ, $f(x)$ dista de $f(a)$ menos que ε.
- δ depende de ε: mientras más pequeño sea ε, más pequeño será δ.

2.3.10. Teorema (signo de una función continua)

Si f es una función continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a en el que el signo de $f(x)$ coincide con el signo de $f(a)$.

Demostración: Supongamos que $f(a)$ es positivo, y sea ε verificando que $0 < \varepsilon < f(a)$. Puesto que f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) > f(a)-\varepsilon > 0$$



es decir, $f(x)$ es también positivo en el entorno $(a-\delta, a+\delta)$. El caso $f(a)$ negativo se demuestra de forma totalmente análoga.

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario.

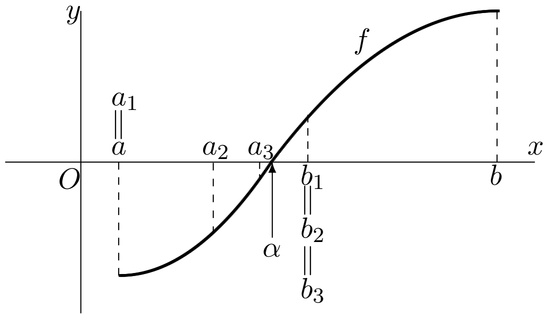
Corolario

Si f es una función continua en a y en todo entorno de a hay puntos donde la función toma signo contrario, entonces $f(a) = 0$.

2.3.11. Teorema de Bolzano

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua con $f(a)f(b) < 0$ (signo contrario en los extremos del intervalo), entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.
Demostración: Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, entonces $\alpha = \frac{a+b}{2}$ y el teorema queda demostrado. Si no es así, en unos de los intervalos en que el punto medio divide al intervalo original, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ o $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, la función toma signo contrario en sus extremos, y se llama $[a_1, b_1]$ a tal intervalo que verifica: $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Repitiendo el razonamiento anterior sobre el intervalo $[a_1, b_1]$ se puede llegar, como antes, a la solución α o a un nuevo intervalo $[a_2, b_2]$ que en el que la función cambia de signo en sus extremos: $f(a_2)f(b_2) < 0$.
Y así sucesivamente.



Pueden ocurrir dos cosas:

- Para algún $n \geq 1$, $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$. En este caso, $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ y el teorema queda demostrado.
- Para todo $n \geq 1$, $f(a_n)f(b_n) < 0$. En este caso se obtiene una sucesión de intervalos cerrados encajados con longitud tendiendo a cero:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \qquad \text{y} \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aplicando la propiedad 1.1.7. de los intervalos encajados:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$$

La función es continua en α y, puesto que $a_n, b_n \to 0$, en todo entorno suyo hay puntos donde toma signo contrario. Entonces, aplicando el corolario anterior, $f(\alpha) = 0$ y el teorema queda probado.

Aplicación a la existencia y cálculo de raíces de una ecuación: En las ecuaciones, el teorema de Bolzano se puede usar para conocer la existencia de alguna raíz que, aplicando el método de bipartición seguido en su demostración, se puede hallar aproximadamente. Para esto, basta tener en cuenta que en la demostración del teorema de Bolzano:

$$\alpha_n = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ aproxima a } \alpha \text{ con un error menor que } \varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.3.12. Ejemplo

Demuestra que la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$ *tiene al menos una raíz en el intervalo* $[0, 1]$*. Hállala con un error menor que una centésima.*
Solución: Se considera la función $f(x) = x^2 + x - 1$ que es continua en el intervalo $[0, 1]$ en cuyos extremos toma signo contrario:

$$f(0)f(1) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$, y este *alpha* es una raíz de la ecuación en el intervalo $[0, 1]$. Para aproximar la raíz, mediante el método de bipartición, se puede usar la siguiente tabla donde se llega a que la raíz es $\alpha \approx \alpha_n = 0,6171875$ con un error menor que $\varepsilon_n = 0,0078125 < 0,01$.

n	a_n $(f<0)$	b_n $(f>0)$	$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$	$\alpha_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(\alpha_n)$
0	0	1	0,5	0,5	−0,25
1	0,5	1	0,25	0,75	0,3125
2	0,5	0,75	0,125	0,625	0,015625
3	0,5	0,625	0,0625	0,5625	−0,12109
4	0,5625	0,625	0,03125	0,59375	−0,05
5	0,59375	0,625	0,015625	0,609375	−0,0192
6	0,609375	0,625	0,0078125	0,6171875	

2.3.13. Teorema de Darboux (de los valores intermedios)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, para cualquier β comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = \beta$.
Demostración: Si $f(a) = f(b)$ el resultado es trivial. Supongamos que $f(a) < f(b)$ y sea β arbitrario verificando que $f(a) < \beta < f(b)$.

Se considera la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = f(x) - \beta$$

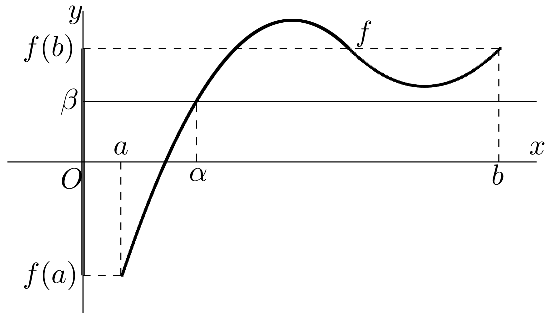
Esta función es continua y toma valores de signo contrario en sus extremos:

$$g(a) = f(a) - \beta < 0 \quad \text{y} \quad g(b) = f(b) - \beta > 0$$

Aplicando a g el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $g(\alpha) = f(\alpha) - \beta = 0$, es decir,

$$f(\alpha) = \beta$$

como se quería demostrar.



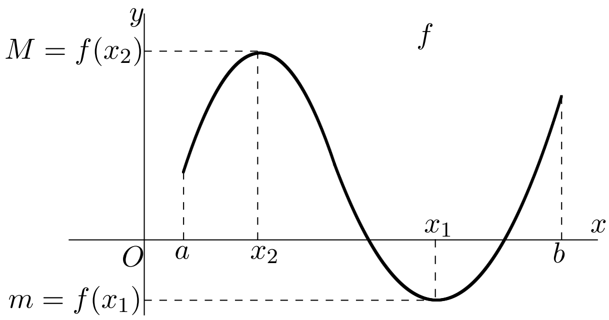
En el caso $f(a) > f(b)$ la demostración es totalmente análoga.

2.3.14. Teorema de Weierstrass (del máximo-mínimo)

Toda función continua f definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su máximo y su mínimo, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que:

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$$

para todo $x \in [a,b]$.

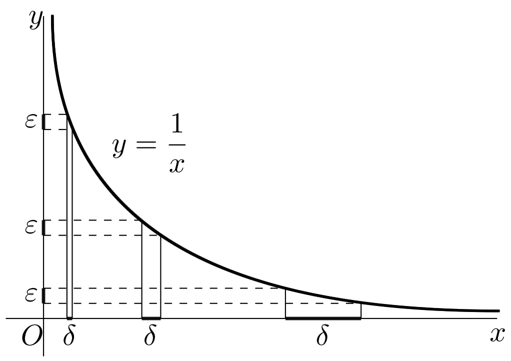


2.3.15. Continuidad uniforme

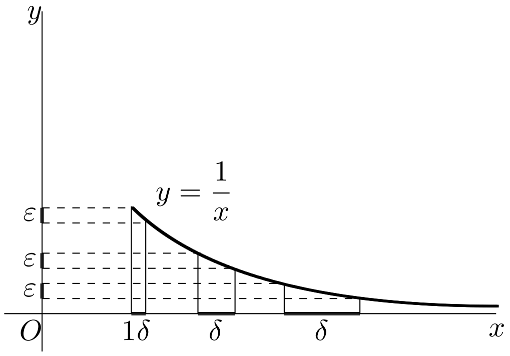
En la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad de una función, el valor $\delta > 0$ depende generalmente de ε y del punto. Cuando no depende del punto se obtiene la continuidad uniforme:

f es **uniformemente continua** en $[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que:

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$



Fijado $\varepsilon > 0$, $\delta \to 0$ cuando $x \to 0$, es decir, no hay un δ positivo que valga para todas las x. Por tanto, la función $y = \dfrac{1}{x}$ no es uniformemente continua en el intervalo $(0, +\infty)$.



Fijado $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ mínimo que vale para todo x (el que en la figura está más próximo a 1). Por tanto, la función $y = \dfrac{1}{x}$ es uniformemente continua en el intervalo $[1, +\infty)$.

Teorema de Heine
Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua.

2.3.16. Ejemplos

Demuestra que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$ y, sin embargo, no lo es en $\mathbb{R}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La tarifa de un parking público es de 2 euros la primera hora o fracción y de 1.5 euros las restantes. Expresa el coste total del estacionamiento de un vehículo en función del tiempo de estancia, estudia la continuidad de esta función e interpreta el resultado.

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , \text{ si } x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & , \text{ si } x < 0 \\ x - 1 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

3. Determina los valores de b y c para que sea continua en toda la recta real la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ si } |x - 2| < 1 \\ x^2 + bx + c & , \text{ si } |x - 2| \geq 1 \end{cases}$$

4. Halla el dominio, estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de las funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{3 - 3x}{(1 + 2^{1/x})(x^2 - 3x + 2)}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x-3}} \log\left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)}{x - 1}$

5. Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \frac{(x+1)\,|x-2|\,e^{1/|x-1|}}{x^3 - x^2 - 2x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \in D(f) \\ 1 & , \text{ si } x \notin D(f) \end{cases}$$

donde $D(f)$ es el dominio de f.

6. ¿Qué valores deben tomar a y b para que la siguiente función sea continua en $x = 1$ y discontinua en $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , \text{ si } x \leq 1 \\ 3x & , \text{ si } 1 < x < 2 \\ bx^2 - a & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

7. Demuestra que la ecuación $e^x = 3x$ tiene al menos una raíz, y encuentra un intervalo de longitud 1 que la contenga.

8. Estudia la acotación y calcula, si existen, los máximos y mínimos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ en $[-3, 2]$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ en $\mathbb{R}$ **(c)** $f(x) = e^{-1/x^2}$ en $\mathbb{R}$

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Una función definida en toda la recta es siempre continua.

(b) Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$ entonces su imagen es el intervalo $[f(a), f(b)]$.

(c) Toda función continua está acotada.

(d) Toda función continua definida en un intervalo acotado está acotada.

2. Se dice que una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es **lipschitziana**, o verifica la **condición de Lipschitz** si existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$. Demuestra que toda función lipschitziana es continua.

3. Prueba que si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua, entonces existe un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

4. Prueba que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

5. Justifica, mediante ejemplos gráficos y analíticos, que en el teorema de Weierstrass es fundamental que el intervalo sea cerrado y acotado.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades:

(a) $y = \lfloor 1/x \rfloor$ **(b)** $y = \lfloor x^2 \rfloor$ **(c)** $y = \lfloor \sin x \rfloor$

2. Estudia la continuidad de las funciones: **(a)** $y = \cos \dfrac{1}{x}$; **(b)** $y = x \cos \dfrac{1}{x}$.

3. Define en $x = 1$, cuando sea posible, las funciones siguientes para que sean continuas:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{|x - 1|}$

4. Halla el valor de a para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & , \text{ si } x \leq 2 \\ (1 - a)x & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

5. Determina los valores de a para los que la función $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 - 2ax + 1}$ es continua en $\mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a es continua en el intervalo $[0, 1]$?

6. Encuentra un intervalo de longitud uno en el que cada una de las siguientes ecuaciones tenga una raíz.

(a) $x^3 - x + 5 = 0$ **(b)** $x^5 + 4x^3 - 2x + 2 = 0$

7. Prueba que el polinomio $P(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ tiene cuatro raíces reales.

8. Un automóvil se desplaza de la ciudad A a la ciudad B, y al día siguiente hace el camino contrario saliendo y llegando ambos días a la misma hora. Prueba que existe un lugar en la carretera por el que ambos días pasa a la misma hora.

9. Un escalador comienza, desde el campamento base, la subida a una montaña a las 8:00 horas; llega a la cima, pernocta en un refugio, y comienza a descender al día siguiente y a la misma hora, por el mismo sendero, hasta el campamento. ¿Hay alguna hora a la que estuvo los dos días a la misma altura?

10. Usa el método de bipartición para hallar, con un error menor que 0,01, una raíz de cada una de las ecuaciones

(a) $2x^3 + 5x - 13 = 0$ **(b)** $\cos x = x$

11. Estudia la acotación y calcula, si existen, los máximos y mínimos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $[0, 5]$ **(b)** $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ en $[-2, 2]$ **(c)** $f(x) = e^x$ en $\mathbb{R}$

12. Comprueba que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en el intervalo $[1, +\infty)$ y que no lo es en el intervalo $(0, 1]$.