

2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.2. LÍMITES

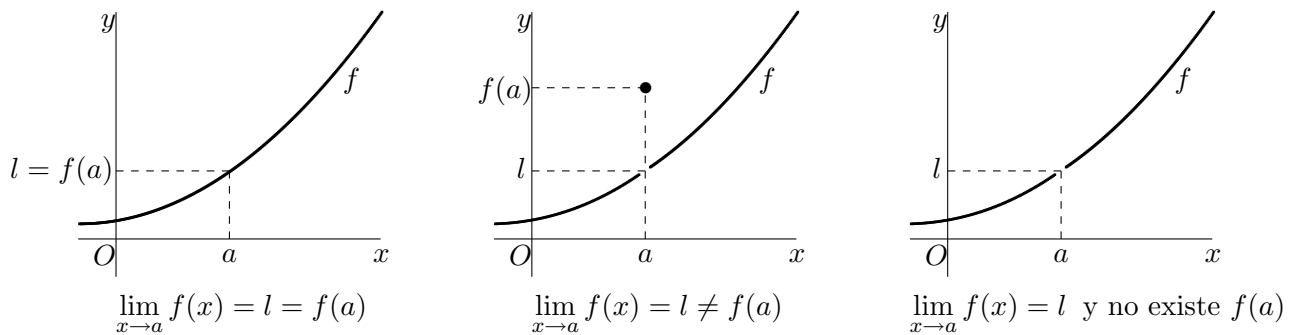
2.2.1. Límite de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$ (aunque no, necesariamente, en el punto).

Definición intuitiva: Se dice que f tiene **límite** l en el punto a si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a , y se indica:

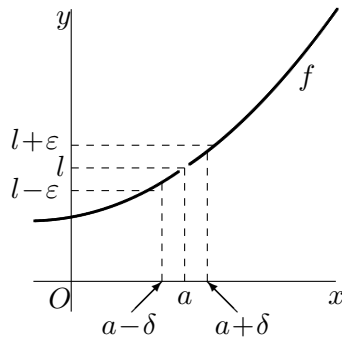
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Como se ilustra en la siguiente figura, la existencia de límite y su valor son independientes de que la función esté definida en el punto y de su valor en dicho punto.



Definición formal: Se dice que f tiene **límite** l en el punto a si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$$



- Si x dista de a menos que δ , $f(x)$ dista de l menos que ε .
- δ depende de ε : mientras más pequeño sea ε , más pequeño será δ .

2.2.2. Ejemplos

1. Demuestra, intuitivamente y formalmente, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$ (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$

2. Demuestra que la función $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ no tiene límite en ningún punto.

2.2.3. Límites laterales

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$, aunque no necesariamente en el punto. Al hallar el límite de f en a hay que considerar, si es posible, valores de x que tienden al punto a tanto por su derecha como por su izquierda. Existen muchas funciones, como las definidas a trozos, en que estos valores (por la derecha y por la izquierda) hay que considerarlos por separado, obteniendo lo que se conoce como límites laterales:

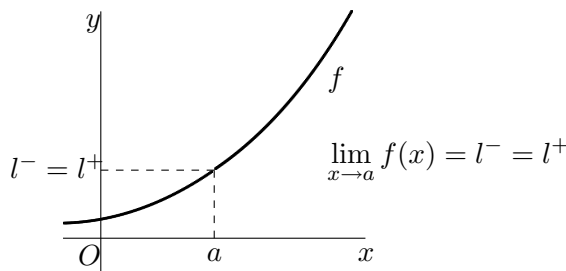
- Se dice que l^- es el **límite por la izquierda** de f en el punto a si $f(x)$ tiende a l^- cuando x tiende a a por su izquierda (con valores menores que a). Formalmente:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l^- \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } a - \delta < x < a \implies |f(x) - l^-| < \varepsilon)$$

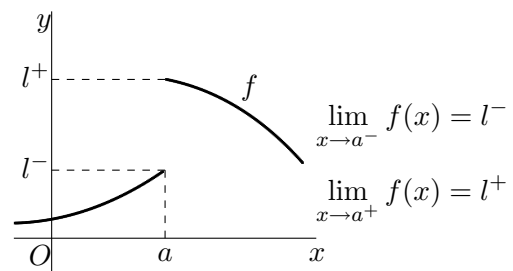
- Se dice que l^+ es el **límite por la derecha** de f en el punto a si $f(x)$ tiende a l^+ cuando x tiende a a por su derecha (con valores mayores que a). Formalmente:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l^+ \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } a < x < a + \delta \implies |f(x) - l^+| < \varepsilon)$$

Obviamente, existe el límite de una función en un punto si y sólo si existen los límites laterales y coinciden. Cuando la función sólo está definida a uno de los lados del punto, se define el límite como el límite lateral correspondiente.



Los límites laterales coinciden y, por tanto, existe el límite de la función en el punto.



Los límites laterales son distintos y, por tanto, no existe el límite de la función en el punto.

2.2.4. Límites infinitos

Sea $y = f(x)$ una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$, aunque no necesariamente en el punto.

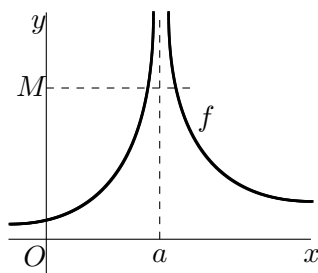
- Se dice que f tiene **límite $+\infty$** en el punto a si $f(x)$ se hace mayor que cualquier número positivo cuando x tiende a a . Formalmente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M)$$

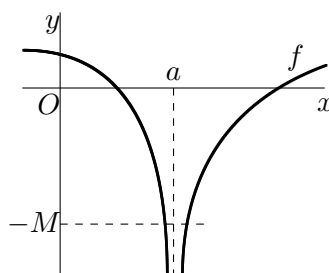
- Se dice que f tiene **límite $-\infty$** en el punto a si $f(x)$ se hace menor que cualquier número negativo cuando x tiende a a . Formalmente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M)$$

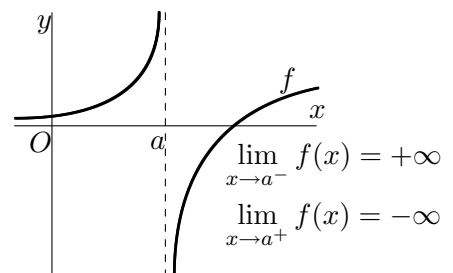
Análogamente, se definen los límites laterales infinitos. Estos límites infinitos se presentan con frecuencia en puntos donde la función no está definida.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2.2.5. Ejemplos

Calcula y demuestra los siguientes límites: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

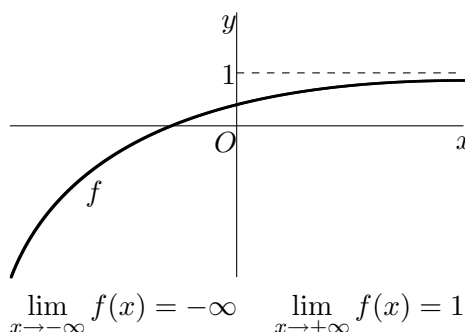
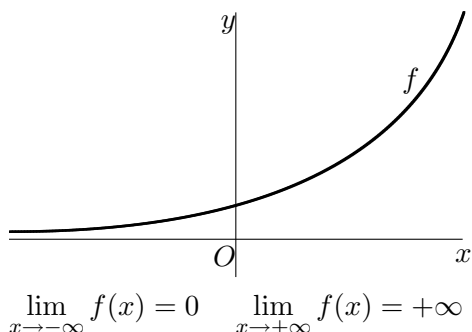
2.2.6. Límites en el infinito

Si $y = f(x)$ es una función definida en un entorno de $+\infty$ (es decir, en un intervalo de la forma $(R, +\infty)$), se define su **límite en $+\infty$** , según el caso, como:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x > k \implies |f(x) - l| < \varepsilon) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty &\iff (\forall M > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x > k \implies f(x) > M) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty &\iff (\forall M > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x > k \implies f(x) < -M) \end{aligned}$$

Análogamente, si $y = f(x)$ es una función definida en un entorno de $-\infty$ (es decir, en un intervalo de la forma $(-\infty, R)$), se define su **límite en $-\infty$** , según el caso, como:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l &\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x < -k \implies |f(x) - l| < \varepsilon) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty &\iff (\forall M > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x < -k \implies f(x) > M) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\iff (\forall M > 0 \exists k > 0 \text{ tal que: } x < -k \implies f(x) < -M) \end{aligned}$$



2.2.7. Ejemplos

Calcula y demuestra los siguientes límites: (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)$.

2.2.8. Propiedades de los límites

Si f y g son dos funciones definidas en un entorno de a (que puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$), entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} kf(x) &= k \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) & \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$$

siempre que no se presente alguna de las siguientes **indeterminaciones**:

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

que, en cada caso, habrá que resolver mediante técnicas adecuadas de cálculo de límites. No son indeterminaciones, siendo su valor el indicado en cada caso, las siguientes:

$$\begin{aligned} l + \infty &= \infty & l \cdot \infty &= \pm\infty, \text{ si } l \neq 0 & \frac{l}{\infty} &= 0 & \frac{l}{0} &= \pm\infty, \text{ si } l \neq 0 & l^\infty &= 0, \text{ si } 0 \leq l < 1 \\ \infty + \infty &= \infty & \infty \cdot \infty &= \infty & \frac{\infty}{\infty} &= \pm\infty & 0^\infty &= 0 & l^\infty &= \infty, \text{ si } l > 1 \end{aligned}$$

2.2.9. Tres teoremas sobre límites

- **Unicidad:** Si existe el límite de una función en un punto (finito o infinito), su valor es único.
- **Regla del sandwich:** El límite de una función comprendida entre dos que tienen el mismo límite coincide con este, es decir:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ en un entorno de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

- **Teorema:** El producto de una función acotada por otra con límite cero también tiene límite cero, es decir:

$$\begin{cases} f \text{ acotada en un entorno de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

En los tres resultados anteriores, a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$. Los dos primeros se pueden demostrar usando la definición formal de límite, mientras que el tercero es una consecuencia de la regla del sandwich.

2.2.10. Cálculo elemental de límites

Usando la definición formal de límite se pueden demostrar los siguientes límites:

1. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty$$

donde $a_n x^n$ es el sumando de mayor grado del polinomio, que se llama **término director**. En los límites en el infinito, el signo depende del signo del infinito, del signo de a_n y de que n sea par o impar.

2. El límite de una función racional es:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad \text{si } Q(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n < m \\ a_n/b_m & , \text{ si } n = m \\ \pm\infty & , \text{ si } n > m \end{cases}$$

3. El límite de una función exponencial es:

$$\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } a > 1 \\ 0 & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & , \text{ si } a > 1 \\ +\infty & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

4. El límite de una función logarítmica es:

$$\lim_{x \rightarrow c} \log_a x = \log_a c, \quad \text{si } c > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } a > 1 \\ -\infty & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } a > 1 \\ +\infty & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

5. Límites de la forma 1^∞ y el número e :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e, \quad \text{si } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$$

y como se justificará más adelante:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (1^{\pm\infty}) = e^\lambda \quad \text{donde } \lambda = \lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x) - 1]$$

2.2.11. Ejemplos

1. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(2x^2+7x+5)^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x + 1 \right)$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x$

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^x$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - 3x + 1}}{1 - x^2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x$

(l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

2. Calcula los límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

recurriendo, si es necesario, a los límites laterales correspondientes.

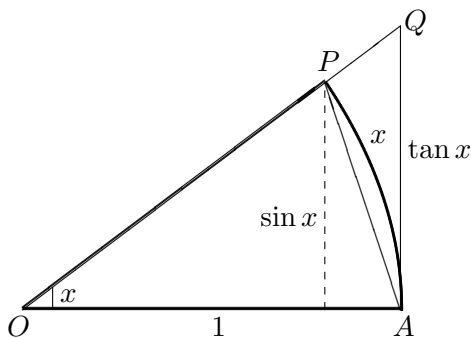
2.2.12. Límites de funciones trigonométricas

Usando la regla del sandwich y las propiedades de los límites, se puede probar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \qquad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \qquad \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \begin{cases} \tan a & \text{si } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{no existe} & \text{si } a = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

siendo distintos $(-\infty$ y $+\infty)$ los límites laterales de la tangente en los ángulos $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Puesto que las funciones trigonométricas son periódicas y no constantes, al acercarse a infinito repiten un mismo ciclo de valores indefinidamente y no se acercan a un valor fijo. Por tanto, no existe el límite en el infinito para ninguna de ellas.

Un límite interesante es el de la función $y = \frac{\sin x}{x}$ en $x = 0$ que presenta una indeterminación de la forma $0/0$. Si $0 < x < \pi/2$, observando la figura:



$$\begin{aligned} \text{área}(\triangle OAP) &< \text{área}(\text{sector } OAP) < \text{área}(\triangle OAQ) \implies \\ \implies \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \implies \sin x < x < \tan x \implies \\ \implies 1 < \frac{x}{\sin x} &< \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \implies 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \end{aligned}$$

siendo esta fórmula también cierta para valores negativos de x .

Aplicando la regla del sandwich:

$$\begin{cases} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, & \text{si } 0 < |x| < \pi/2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

y, en general:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ si } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

2.2.13. Ejemplos

1. Calcula los límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

2. Estudia la existencia y calcula el valor, si es posible, de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} x^p \cos \frac{1}{x}, \quad p > 0$$

2.2.14. Infinitésimos

Se dice que una función f es un **infinitésimo** en $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Dos infinitésimos, f y g , en un mismo punto se dicen **comparables** cuando existe el límite de su cociente, y entonces si:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & , \text{ se dice que } f \text{ es un infinitésimo de orden mayor que } g \text{ en } x = a \\ l \neq 0 & , \text{ se dice que } f \text{ y } g \text{ son infinitésimos del mismo orden en } x = a \\ \pm \infty & , \text{ se dice que } f \text{ es un infinitésimo de orden menor que } g \text{ en } x = a \end{cases}$$

En el caso particular de que el cociente sea 1 los infinitésimos, que son del mismo orden, se llaman **equivalentes**:

$$f \text{ y } g \text{ son infinitésimos equivalentes en } x = a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

y se indica: $f \sim g$. Es fácil comprobar, hallando los límites pertinentes, que los siguientes infinitésimos son equivalentes:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x \sim \arcsin x \\ \tan x \sim x \sim \arctan x \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) \sim x \\ a^x - 1 \sim x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1 \end{array} \right\} \text{ en } x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x) \\ \tan \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim \arctan \alpha(x) \\ 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2} \\ \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \\ a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a, \quad a > 0, a \neq 1 \end{array} \right\} \text{ cuando } \alpha(x) \rightarrow 0$$

Haciendo un cambio de variable adecuado, se puede ver que también son equivalentes:

$$\ln x \sim x - 1 \text{ en } x = 1 \quad \ln \alpha(x) \sim \alpha(x) - 1 \text{ cuando } \alpha(x) \rightarrow 0$$

En el cálculo de límites, en productos y cocientes se pueden sustituir infinitésimos por otros equivalentes.

2.2.15. Ejemplos

1. Calcula, usando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{\arcsin(x - 1)} \quad (f) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x^3) \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)$$

2. Demuestra que $f(x) = x/2$ y $g(x) = \sqrt{1+x} - 1$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \rightarrow 0$.

3. Encuentra infinitésimos equivalentes a:

$$(a) \sqrt[3]{x} \ln(1+x), \text{ en } x = 0 \quad (b) \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}, \text{ en } +\infty \quad (c) \sqrt{x} - \sqrt{a}, \text{ en } x = a$$

2.2.16. Infinitos

Se dice que una función f es un **infinito** en $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$, lo que es equivalente a que $1/f$ sea un infinitésimo en dicho punto.

Los polinomios y las funciones exponenciales y logarítmicas, de base mayor que uno, son infinitos en $+\infty$. Al compararlos, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{\log_b x} = +\infty$$

para cualesquiera $a, b > 1$, como más adelante se podrá justificar fácilmente.

2.2.17. Asíntotas

Se llama **asíntota** de una función a cualquier recta a la que se acerca indefinidamente su gráfica en el infinito. Las asíntotas, como las rectas, pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

- La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de la función f si alguno de sus límites laterales en $x = a$ es $+\infty$ o $-\infty$, es decir, si:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

- La recta $y = l$ es **asíntota horizontal** de la función f si alguno de sus límites en el infinito es l , es decir, si:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

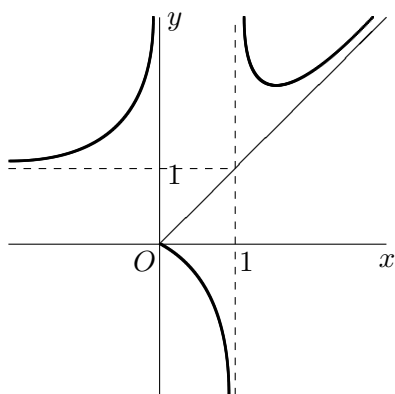
- La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es **asíntota oblicua** de la función f si:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

Obviamente, una función no puede tener en un mismo "lado" ($+\infty$ o $-\infty$) asíntota horizontal y oblicua. Por tanto, sólo se buscan asíntotas oblicuas cuando no las hay horizontales. Para hallar la asíntota oblicua $y = mx + n$ en $+\infty$ se procede como sigue:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \implies n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

siendo necesario, para que exista, que $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$. Análogamente se procede en $-\infty$.



- La recta $x = 0$ es asíntota vertical por la izquierda.
- La recta $x = 1$ es asíntota vertical por ambos lados.
- La recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$.
- La recta $y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$.

2.2.18. Ejemplos

1. ¿Qué condiciones se deben verificar para que una función racional tenga asíntotas horizontales u oblicuas? ¿Cuáles son las asíntotas?
2. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \ln(x^2 - x)$ (b) $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ (c) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{(x - 1)^2}$ (d) $f(x) = xe^{1/x}$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Un operario trata de determinar el área de un cuadrado midiendo su lado. Si el lado mide 2m, ¿cuál es el máximo error que puede cometer en su medición si quiere calcular el área con un error menor que $10^{-6}m^2$?
- Se dispone de una jarra de forma cilíndrica con dos litros de capacidad, cuya base es un círculo de 6 cm de radio, y se desea imprimir una marca en el lateral para medir un litro. ¿Cuál debe ser el grosor de las marcas si se quiere medir el litro con un error inferior al 1%?
- Halla el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 1$ en cada uno de los dos casos siguientes:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 3} = 1 \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{(x-1)^2} = 1$$

- Halla los valores de a y b para que existan los límites en $x = -1$ y $x = 1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & , \text{ si } x \leq -1 \\ ax & , \text{ si } -1 < x < 1 \\ be^{x-1} + 2 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

- Encuentra los valores de m para los que existe el límite de la función $f(x) = \frac{6x^2 + mx - m^2}{x^2 - 2x + 1}$ cuando $x \rightarrow 1$. Halla el límite en esos casos.
- Halla los límites laterales, y el límite si existe, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$(a) y = \frac{x(1+x)}{|x|}, a = 0; \quad (b) y = e^{\frac{1}{x-2}}, a = 2; \quad (c) y = \sinh \frac{1}{x}, a = 0; \quad (d) y = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, a = 0$$

- Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{4x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x^2 + 5x} \quad (g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-2)}{x^3-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 2x}{x^2} \quad (f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+|x|)}{x^2}$$

- Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cos^2 \frac{1}{x - \pi} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| \sin \frac{1}{(x-1)^2}$$

- Halla los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $y = x + \sqrt{x^2 + x}$.

- Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^x \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^x \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{3x^2}$$

- Halla los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $y = \tanh x$.

- Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 \sin \frac{1}{x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \cos x}{x}$$

- Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - x^2)^{1/x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 + x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - (a) El límite de una función en un punto es siempre el valor de la función en el punto.
 - (b) Si una función no está definida en un punto no puede existir el límite en dicho punto.
 - (c) El límite de una función en un punto no coincide necesariamente con el valor de la función en el punto.
 - (d) El límite de una función en un punto existe siempre que existan los límites laterales.
 - (e) Si no existen los límites de f y g en un punto, no puede existir el límite de $f + g$ en dicho punto.
 - (f) El límite del producto de una función con límite cero por otra con límite infinito es un número distinto de cero e infinito.
 - (g) Una función con asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.
 - (h) Una función no puede tener dos asíntotas horizontales.
 - (i) Una función no puede tener más de dos asíntotas horizontales u oblicuas.
 - (j) Una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales (incluso infinitas).
2. Pon un ejemplo de una función acotada sin límite ni límites laterales en un punto.
3. Justifica, mediante ejemplos adecuados, que $0 \cdot \infty$ es una indeterminación.
4. Justifica, mediante ejemplos adecuados que 1^∞ es una indeterminación.
5. Demuestra la siguiente fórmula para límites de funciones exponenciales:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (1^{\pm\infty}) = e^\lambda \quad \text{donde} \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x) - 1]$$

6. Si $f(x) = x^2 - x + 1$, encuentra una expresión para $g(x)$ de tal manera que, cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x)/g(x)$ tenga límite: (a) -3 ; (b) 0 ; (c) $+\infty$; (d) carezca de límite.
7. Si f y g son infinitésimos en $x = a$, justifica razonadamente si también lo son las siguientes funciones: $f + g$, $f \cdot g$, f/g y f^g .

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Indica el margen de precisión con que se ha de medir la longitud del radio en un círculo para que su área sea $16\pi \pm 0.001$.
2. Usando la definición formal de límite, prueba que: (a) $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 2x) = 3$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x + 1} = 1$.
3. Usando la definición formal de límite, prueba que:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, si $c \neq 0$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$, si $c > 0$
4. Halla los límites laterales, y el límite si existe, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$(a) y = \frac{x}{|x|}, a = 0; (b) y = e^{\frac{1}{|x-2|}}, a = 2; (c) y = \tanh \frac{1}{x}, a = 0; (d) y = \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x-2}}}, a = 2$$

5. Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{\sin x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{9x^2}$$

6. Halla los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $y = x - \sqrt{x^2 + x}$.

7. Halla los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)^x \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^x \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \right)^x$$

8. Halla los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $y = \cosh x$.

9. Halla los siguientes límites: (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x}$; (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$.

10. Encuentra infinitésimos equivalentes, cuando $x \rightarrow 0$, a $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x}}$ y $g(x) = \tan x - \sin x$.

11. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$(a) y = \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} \quad (b) y = \ln(x^2+3x+2) \quad (c) xy + |x| - 2y + 1 = 0$$