

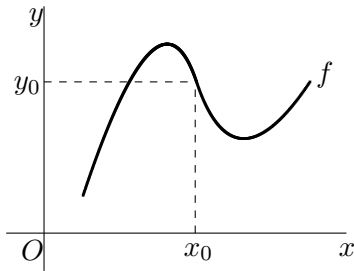
2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.1. FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.1. Definición

Se llama **función real de una variable real** a cualquier aplicación $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y sólo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. La función se suele representar por $y = f(x)$ donde x se llama **variable independiente** e y se llama **variable dependiente**.

Si $f(x_0) = y_0$, se suele decir que y_0 es la **imagen** de x_0 por la función f , o que x_0 es un **origen** de y_0 . La representación en el plano cartesiano de todos estos pares ordenados (x_0, y_0) se llama **gráfica** de la función f .



La gráfica de la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

El conjunto $D \subset \mathbb{R}$ formado por todos los valores $x \in \mathbb{R}$ en los que la función f está definida se llama **dominio** de f , y se representa por $D(f)$. Cuando no se especifica el dominio de la función, se entiende que es el conjunto de todos los números reales para los que la función está bien definida.

2.1.2. Ejemplos

1. El dominio de la función $y = x^2 - 1$ es $D = \mathbb{R}$, y la imagen $I = [-1, +\infty)$.
2. El dominio de la función $y = \sqrt{x}$ es $D = [0, +\infty)$, y la imagen es también $I = [0, +\infty)$.
3. Al estar especificado, el dominio de la función:

$$f(x) = 2x - 1, \quad 0 < x \leq 3$$

es $D(f) = (0, 3]$, y la imagen $I(f) = (-1, 5]$.

2.1.3. Crecimiento local y global

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Se dice que la función f es **creciente** en x_0 si existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \\ x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x_0) \leq f(x) \end{cases}$$

Análogamente, se dice que la función f es **decreciente** en x_0 si existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \\ x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x_0) \geq f(x) \end{cases}$$

Cuando, en las definiciones anteriores, las desigualdades entre los valores de la función son estrictas, se dice que la función es **estrictamente creciente** o **estrictamente decreciente** en x_0 .

Si la función sólo está definida a uno de los lados del punto, se dice que es (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente si lo es por el lado en que está definida.

Globalmente, se dice que f es **creciente** en un subconjunto del dominio $A \subset D$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se cumple que:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

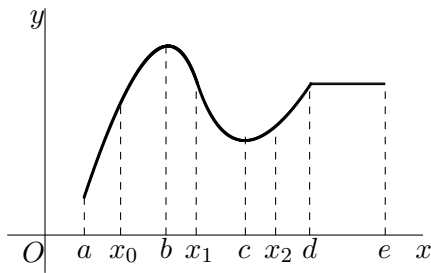
y, se dice que f es **decreciente** en $A \subset D$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se cumple que:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Como en el caso local, si las desigualdades son estrictas el crecimiento o decrecimiento se dice **estricto**.

2.1.4. Ejemplo

La función cuya gráfica aparecen en la figura es:



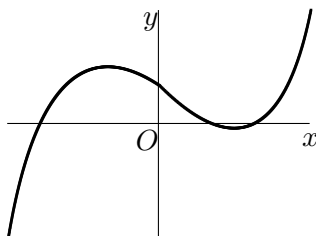
- Creciente en a, x_0, x_2, d y e .
- Estrictamente creciente en a, x_0 y x_2 .
- Decreciente en x_1 y e .
- Estrictamente decreciente en x_1 .
- Creciente en el intervalo $[a, b]$ y en $[c, e]$.
- Estrictamente creciente en $[a, b]$ y en $[c, d]$.
- Decreciente en $[b, c]$ y en $[d, e]$.
- Estrictamente decreciente en $[b, c]$.
- Constante en $[d, e]$.

El crecimiento global en intervalos puede causar confusión con el crecimiento local en sus extremos: la función de la figura es globalmente creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, incluyendo al punto b , y no lo es localmente en b , ya que en el crecimiento local hay que mirar a los dos lados del punto.

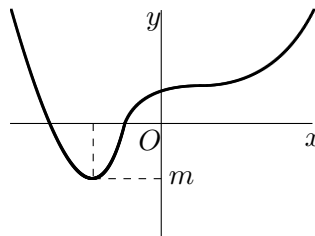
2.1.5. Acotación y extremos

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

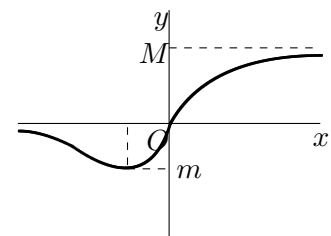
- Se dice que f está **acotada superiormente** si existe un número real M , llamado **cota superior**, tal que $f(x) \leq M$ para cualquier $x \in D$. La menor de las cotas superiores se llama **supremo** y, si se alcanza en algún punto del dominio, **máximo**.
- Se dice que f está **acotada inferiormente** si existe un número real m , llamado **cota inferior**, tal que $f(x) \geq m$ para cualquier $x \in D$. La mayor de las cotas inferiores se llama **ínfimo** y, si se alcanza en algún punto del dominio, **mínimo**.
- Se dice que f está **acotada** cuando lo está superior e inferiormente, es decir, cuando existen números reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier $x \in D$.



Función no acotada, ni superior ni inferiormente.



Función acotada inferiormente, con mínimo, pero no acotada superiormente.



Función acotada con mínimo y supremo, pero no máximo.

2.1.6. Funciones periódicas

Una función $y = f(x)$ se llama **función periódica** si existe un número $T > 0$, llamado **periodo**, tal que:

$$f(x + T) = f(x)$$

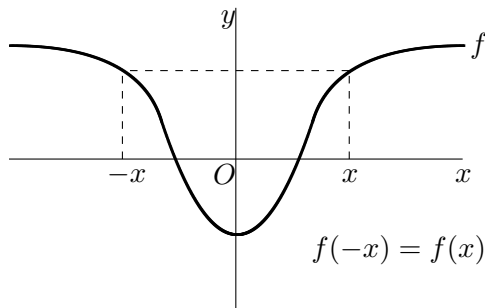
Para representar gráficamente una función periódica de periodo T , basta con hacerlo en el intervalo $[0, T]$ y extenderla periódicamente al resto de su dominio.

2.1.7. Funciones pares e impares

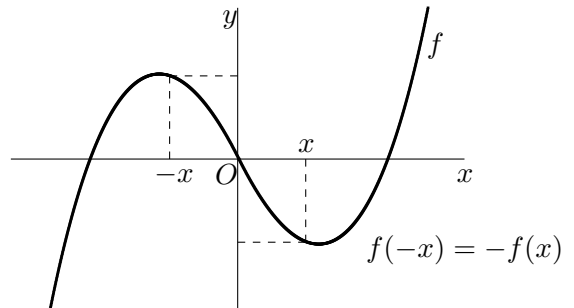
Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}$ que es simétrico respecto del origen, es decir, tal que si $x \in D$ entonces $-x \in D$. Se dice que:

- f es una **función par** si se verifica que $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D$.
- f es una **función impar** si se verifica que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D$.

De la propia definición se deduce que la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de abscisas, y la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen.



Gráfica de una función par



Gráfica de una función impar

2.1.8. Ejemplo

Decide cuáles de las siguientes funciones son pares o impares:

- | | | | |
|-------------------|---|-----------------------------|-------------------------------|
| (a) $y = x^2 - 1$ | (c) $y = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 3}$ | (e) $y = \frac{x^2}{x - 1}$ | (g) $y = \frac{x^3}{x^5 + x}$ |
| (b) $y = x^3$ | (d) $y = 2^x$ | (f) $y = \sin x$ | (h) $y = \cos x$ |

2.1.9. Operaciones algebraicas con funciones

Dadas dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se definen las siguientes operaciones algebraicas:

- Suma o diferencia:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, con dominio $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$.
- Producto por un número real:** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, con dominio $D(\alpha f) = D(f)$.
- Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, con dominio $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.
- Cociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, con dominio $D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}$.

2.1.10. Ejemplos

- Si $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = x + 2$, encuentra las expresiones algebraicas de $f + g$, $f \cdot g$ y f/g , especificando el dominio de cada una de ellas.
- Encuentra las expresiones algebraicas de $f - g$ y $f \cdot g$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \text{ si } x \leq 0 \\ x & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x & , \text{ si } x < 1 \\ 1 - x & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.1.11. Composición de funciones

Dadas dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se define la **composición** $g \circ f$, que se lee "f compuesto con g", como la función:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para que un x pertenezca al dominio de la composición $g \circ f$, es necesario que se le pueda aplicar f y que se pueda aplicar g a su imagen por f , es decir, que x pertenezca al dominio de f y que $f(x)$ pertenezca al dominio de g . Por tanto

$$D(g \circ f) = \{x : x \in D(f) \text{ y } f(x) \in D(g)\}$$

La composición de funciones, en general, es **no** conmutativa: $g \circ f \neq f \circ g$.

La composición de tres funciones es $(h \circ g \circ f) = h(g(f(x)))$, y así sucesivamente.

2.1.12. Ejemplos

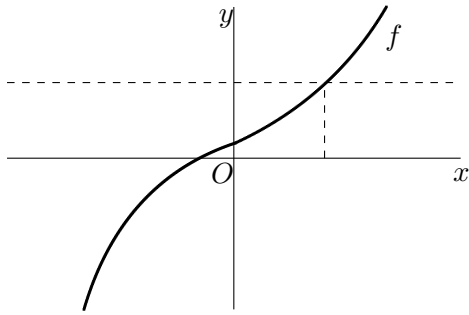
Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = 1/x$, encuentra las expresiones algebraicas de las siguientes composiciones:

$$g \circ f \quad f \circ g \quad f \circ f \quad g \circ g \quad f \circ g \circ h \quad g \circ h \circ f$$

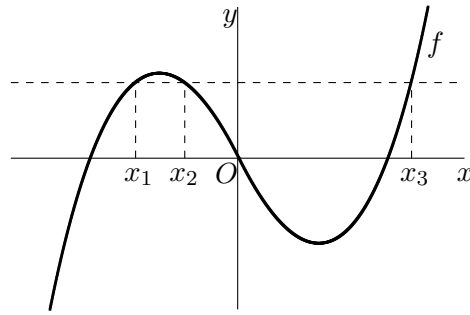
2.1.13. Funciones inyectivas

Una función $y = f(x)$ se dice **inyectiva** o **uno-a-uno** si no hay dos orígenes distintos con la misma imagen, es decir, si:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$



Gráfica de una función inyectiva



Gráfica de una función no inyectiva

Gráficamente, para ver si una función es inyectiva se la puede aplicar el siguiente:

Test de la recta horizontal: Una función es inyectiva o uno-a-uno si cada recta horizontal corta a su gráfica en a no más de un punto.

2.1.14. Función inversa

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva con imagen $I = f(D)$, se llama **función inversa** a $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{si} \quad f(y) = x$$

La función inversa f^{-1} está bien definida ya que, al ser f inyectiva, para cada x existe un único y tal que $f(y) = x$. Por el contrario, las funciones que no son inyectivas no tienen función inversa.

Por la propia definición, es evidente que el dominio y la imagen de la función inversa son, respectivamente, la imagen y el dominio de la función:

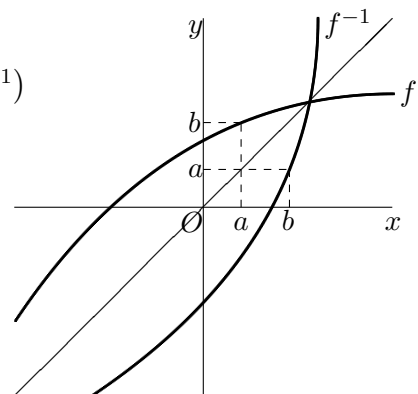
$$D(f^{-1}) = I(f) \quad I(f^{-1}) = D(f)$$

y también que la composición, en cualquier orden, de ambas es la identidad:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \quad \forall x \in I \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in D$$

Las gráficas de una función inyectiva y de su función inversa son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$.

$$(a, b) \in G(f) \iff f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a \iff (b, a) \in G(f^{-1})$$



Para hallar la expresión analítica de la función inversa se puede proceder como indica el siguiente algoritmo:

1. Partiendo de $y = f(x)$, se despeja x en función de y : $x = f^{-1}(y)$.
2. En la expresión obtenida, sustituir y por x y viceversa: $y = f^{-1}(x)$.

Usando este mismo algoritmo, la función f es inyectiva o tiene inversa cuando se puede despejar de forma única x en la expresión $y = f(x)$.

Es fácil observar que la función inversa es una operación involutiva: $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.1.15. Ejemplos

Determina si existe, y halla en su caso, la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = 2 + \sqrt[5]{1 - x^3}$

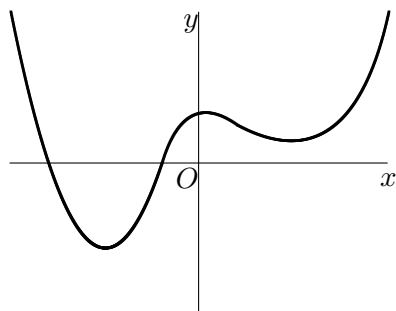
2.1.16. Funciones polinómicas

Son **funciones polinómicas** aquellas cuya expresión analítica es un polinomio:

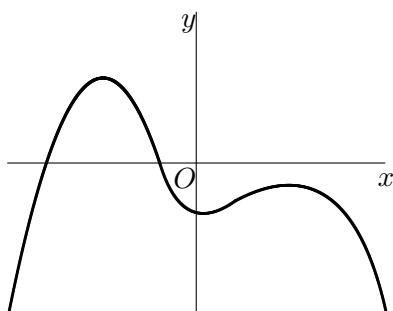
$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

El grado de la función polinómica es el grado del polinomio.

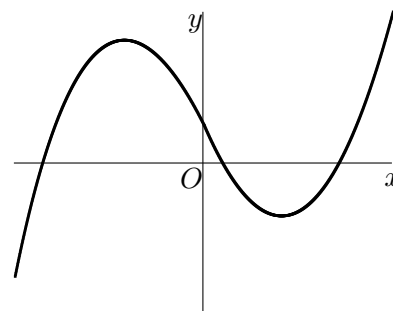
El dominio de las funciones polinómicas es toda la recta real y no están acotadas si su grado es distinto de cero: las funciones polinómicas de grado impar no están acotadas ni superior ni inferiormente, y las de grado par o bien están acotadas inferiormente y no superiormente, o viceversa.



Función polinómica de grado par. Acotada inferiormente y no superiormente.



Función polinómica de grado par. Acotada superiormente y no inferiormente.



Función polinómica de grado impar. No acotada ni superior ni inferiormente.

2.1.17. Funciones racionales

Una **función racional** es el cociente entre dos funciones polinómicas. Su dominio es la recta real sin las raíces del denominador.

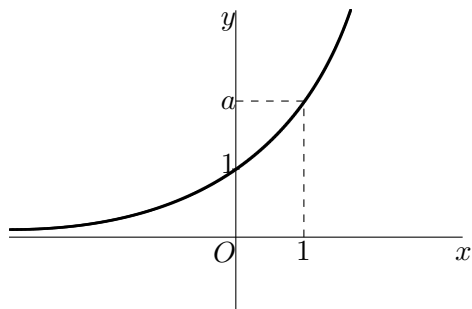
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$$

2.1.18. Funciones exponenciales y logarítmicas

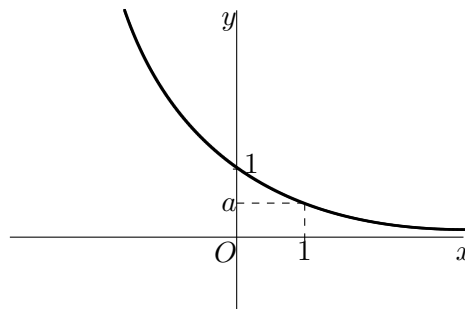
Se llama **función exponencial** a la función:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Su dominio es toda la recta real y su imagen los números reales positivos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $I(f) = (0, +\infty)$. La función exponencial es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.



Función exponencial $y = a^x$ con $a > 1$.

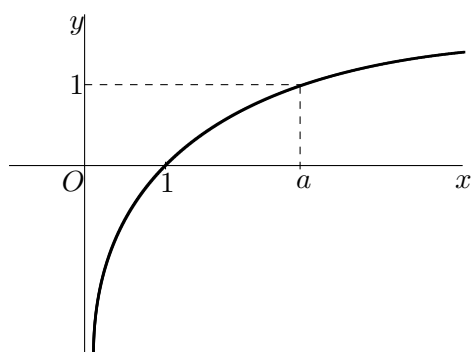


Función exponencial $y = a^x$ con $0 < a < 1$.

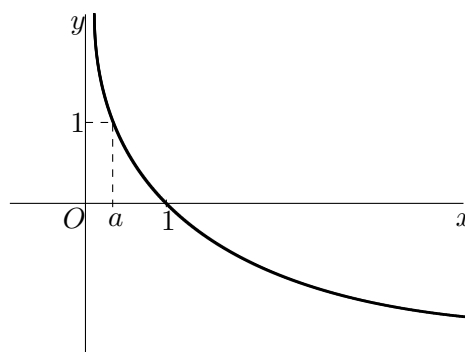
Se llama **función logarítmica** a la función inversa de la función exponencial, y se representa por:

$$f(x) = \log_a x \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Su dominio e imagen son, respectivamente, la imagen y el dominio de la función exponencial, es decir: $D(f) = (0, +\infty)$ e $I(f) = \mathbb{R}$. La función logarítmica es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.



Función logarítmica $y = \log_a x$ con $a > 1$.



Función logarítmica $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$.

2.1.19. Funciones trigonométricas o circulares

Las funciones trigonométricas o circulares son:

Seno: $f(x) = \sin x$	Tangente: $f(x) = \tan x$	Secante: $f(x) = \sec x$
Coseno: $f(x) = \cos x$	Cotangente: $f(x) = \cot x$	Cosecante: $f(x) = \csc x$

1. Función seno: La función $f(x) = \sin x$ verifica las siguientes propiedades:

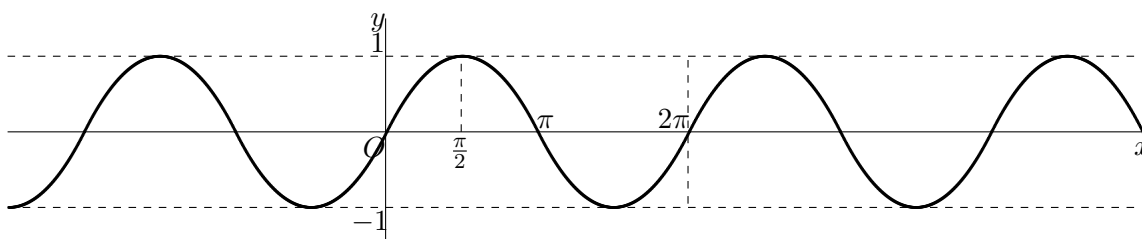
- Su dominio es toda la recta real: $D = \mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $I = [-1, 1]$ y, por tanto, es una función acotada.
- Es una función impar y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto del origen:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

- Es periódica de periodo 2π :

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

Su representación gráfica es:



2. Función coseno: La función $f(x) = \cos x$ verifica las siguientes propiedades:

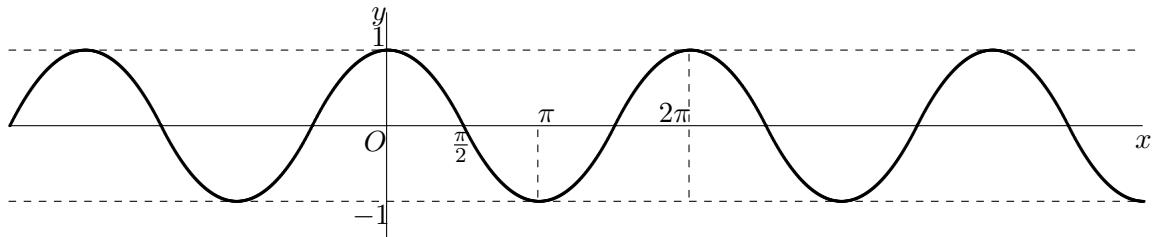
- Su dominio es toda la recta real: $D = \mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $I = [-1, 1]$ y, por tanto, es una función acotada.
- Es una función par y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

- Es periódica de periodo 2π :

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$$

Su representación gráfica es:



3. Funciones tangente y cotangente: Se definen a partir del seno y coseno como:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Verifican las siguientes propiedades:

- Su dominio es:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

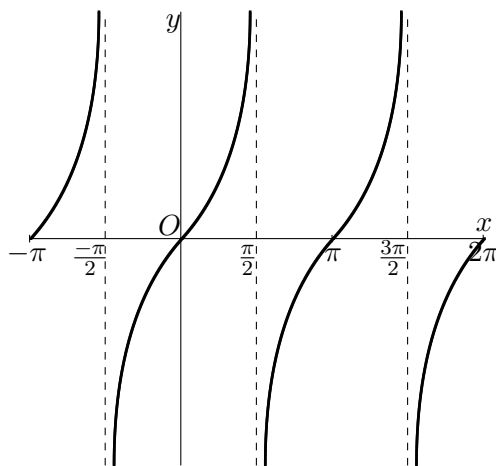
- La imagen de ambas es $I = \mathbb{R}$ y, por tanto, son funciones no acotadas.
- Las dos funciones son impares y, por tanto, sus gráficas son simétricas respecto del origen.

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \qquad \text{y, análogamente:} \quad \cot(-x) = -\cot x$$

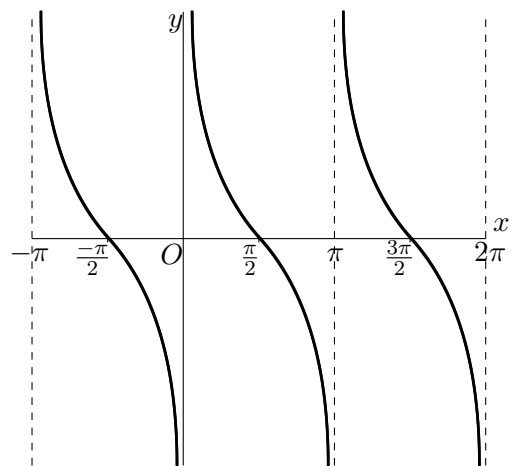
- Son periódicas de periodo π :

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \qquad \text{y, análogamente:} \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Su representación gráfica es:



Función tangente



Función cotangente

4. Funciones secante y cosecante: Se definen a partir del seno y coseno como:

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Verifican las siguientes propiedades:

- Su dominio es:

$$D(\sec) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D(\csc) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

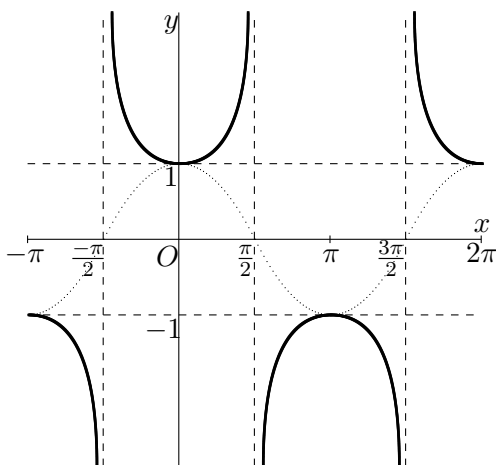
- La imagen de ambas es $I = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y, por tanto, son funciones no acotadas.
- La función secante es par y la cosecante impar.

$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad \csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin x} = -\csc x$$

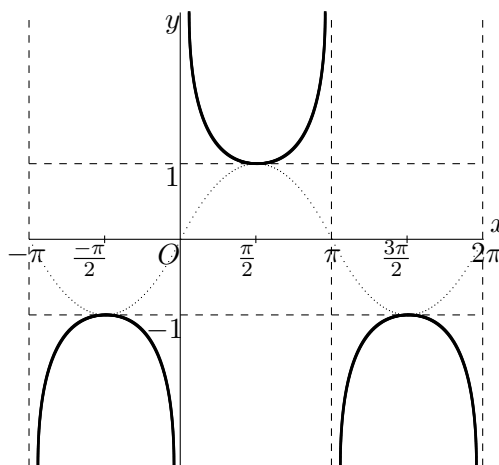
- Son periódicas de periodo 2π :

$$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad \text{y, análogamente: } \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

Su representación gráfica es:



Función secante



Función cosecante

5. Algunas relaciones trigonométricas: Es importante recordar las relaciones más importantes entre las funciones trigonométricas:

- Relaciones fundamentales: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

- Suma y diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}$$

- Ángulo doble:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

- Otras relaciones importantes:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} & \sin x \sin y &= -\frac{\cos(x + y) - \cos(x - y)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} & \sin x \cos y &= \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2} \\ & & \cos x \cos y &= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2} \end{aligned}$$

2.1.20. Funciones trigonométricas inversas

Como se ha visto, ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva y, por tanto, no pueden tener funciones inversas. Sin embargo, sí tienen funciones inversas cuando se restringen sus dominios a conjuntos sobre los que sí son inyectivas.

- 1. Función arcoseno:** Es la función inversa de la función seno restringida al dominio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

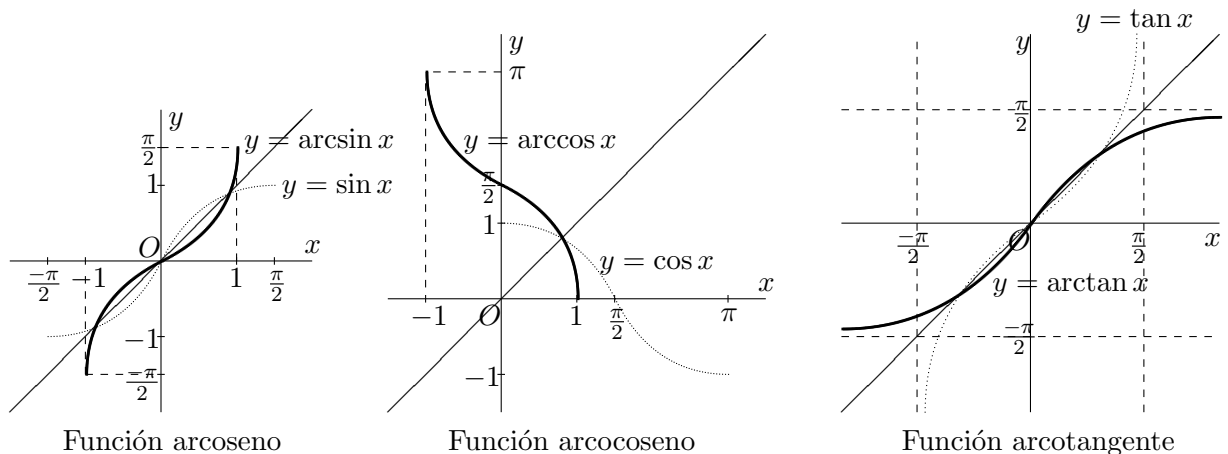
$$\begin{cases} y = \sin x \\ D(\sin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ I(\sin) = [-1, 1] \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \arcsin x \\ D(\arcsin) = [-1, 1] \\ I(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in [-1, 1]$ se define su arcoseno como el único $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sin y = x$. La función arcoseno es impar y acotada.

- 2. Función arcocoseno:** Es la función inversa de la función coseno restringida al dominio $D = [0, \pi]$.

$$\begin{cases} y = \cos x \\ D(\cos) = [0, \pi] \\ I(\cos) = [-1, 1] \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \arccos x \\ D(\arccos) = [-1, 1] \\ I(\arccos) = [0, \pi] \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in [-1, 1]$ se define su arcocoseno como el único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$. La función arcocoseno es acotada, y no es par ni impar.



- 3. Función arcotangente:** Es la función inversa de la función tangente restringida al dominio $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{cases} y = \tan x \\ D(\tan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ I(\tan) = \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \arctan x \\ D(\arctan) = \mathbb{R} \\ I(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ se define su arcotangente como el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\tan y = x$. La función arcotangente es impar y acotada.

- 4. Otras funciones trigonométricas inversas:** Son las funciones inversas del resto de funciones trigonométricas: arcocotangente, arcosecante y arcocosecante. Sus expresiones, dominios e imágenes son:

$$\begin{cases} y = \cot x \\ D(\cot) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ I(\cot) = \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ D(\operatorname{arccot}) = \mathbb{R} \\ I(\operatorname{arccot}) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sec x \\ D(\sec) = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ I(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \operatorname{arcsec} x \\ D(\operatorname{arcsec}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ I(\operatorname{arcsec}) = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \csc x \\ D(\csc) = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \\ I(\csc) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\text{Función inversa}} \begin{cases} y = \operatorname{arccsc} x \\ D(\operatorname{arccsc}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ I(\operatorname{arccsc}) = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

2.1.21. Funciones hiperbólicas

Son funciones que se definen a partir de la función exponencial, cuya expresión analítica, dominio e imagen son los que siguen:

	Expresión analítica	Dominio	Imagen
Seno hiperbólico	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Coseno hiperbólico	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	$[1, +\infty)$
Tangente hiperbólica	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	\mathbb{R}	$(-1, 1)$
Cotangente hiperbólica	$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Secante hiperbólica	$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	\mathbb{R}	$(0, 1]$
Cosecante hiperbólica	$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

El cálculo del dominio e imagen se deja como ejercicio, y su representación gráfica se puede abordar en la sección 3.3 con las técnicas adecuadas para la representación gráfica de funciones.

Algunas relaciones importantes: Las funciones hiperbólicas reciben su nombre por verificar propiedades similares a las de las funciones trigonométricas:

- Relaciones fundamentales: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- Otras relaciones:

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y & \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

y, en particular:

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x & \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \end{aligned}$$

Para verificarlas, basta sustituir cada función hiperbólica por su expresión analítica correspondiente y, operando, verificar la identidad.

2.1.22. Funciones hiperbólicas inversas

Para calcular la función inversa del seno hiperbólico se despeja x en su expresión analítica:

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \implies 2y = e^x - e^{-x} \implies 2ye^x = e^{2x} - 1 \implies (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en la variable e^x . Se resuelve la ecuación y se tiene en cuenta que la exponencial debe ser positiva:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} = \begin{cases} y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 & \text{solución no válida} \\ y + \sqrt{y^2 + 1} \implies x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{cases}$$

Intercambiando la x por la y , se obtiene la función inversa del seno hiperbólico:

$$\sinh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

cuyo dominio e imagen son, respectivamente, la imagen y dominio del seno hiperbólico. Lo mismo que el seno, la tangente, secante y cosecante hiperbólicas son funciones inyectivas y tienen inversa. Sin embargo, el coseno y secante hiperbólicos no son inyectivas, siendo necesario restringir su dominio a los números reales no negativos para que lo sean y puedan tener inversa. La lista completa de las inversas de las funciones hiperbólicas, con indicación de su dominio e imagen, es:

	Dominio	Imagen
$\sinh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\cosh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$	\mathbb{R}
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$	$(0, 1]$	$[0, +\infty)$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{ x } \right)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halla el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) y = \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (b) y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2^x(x^2-1)} \quad (c) y = \sqrt{1 - \sqrt{4-x^2}} \quad (d) y = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$$

2. Halla el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) y = \arcsin \frac{x+1}{x^2+1} \quad (b) y = \log \left(\sqrt[5]{\frac{x^2+x+3}{x^2+1}} - 1 \right)$$

3. Halla el dominio y la imagen de cada una de las siguientes funciones. Estudia también su acotación y calcula, si existen, el supremo, el ínfimo y sus extremos absolutos.

$$(a) f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad (b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (c) f(x) = |\sin x|$$

4. Siendo $f(x) = |x| + |x-1| - |2x-1|$, $x \in \mathbb{R}$, halla los conjuntos $A = f([0, 1])$ y $B = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$.

5. Halla el dominio, la imagen y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

- (a) Parte entera: $E(x) = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor =$ mayor entero menor o igual que x .
- (b) Parte fraccionaria: $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

6. Encuentra las expresiones de las funciones $f + g$, $f - g$ y fg , donde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \leq 2 \\ x & , \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } x \leq 0 \\ 2-x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

7. La expresión de una función, definida en toda la recta real, en $x \geq 0$ es:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

¿Cómo está definida en $x < 0$ si la función es par? ¿Y si es impar? Dibuja sus gráficas.

8. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares:

$$(a) f(x) = \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \quad (b) f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + \cos 2x} \quad (c) f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + \sin x}$$

9. Estudia si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, calcula su periodo:

$$(a) f(x) = \sin x + \cos 2x \quad (b) f(x) = \sin x \cos 2x \quad (c) f(x) = \sin x + \cosh x$$

10. Expresa las funciones $F(x) = (x + 1)^3$ y $G(x) = \sin(1 + |x|)$ como composición de funciones elementales.

11. Halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x & , \text{ si } x < 1 \\ 1 + x & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

12. Sea $g(x) = \frac{1+3x}{2}$ y f una función tal que $f(g(x)) = 1 - x$. Encuentra una expresión para $f(h(x))$, siendo $h(x) = \frac{2+5x}{3}$.

13. Estudia cuáles de las siguientes funciones son uno-a-uno y, en caso de que exista, calcula su inversa.

$$(a) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (b) f(x) = \frac{x}{|x|}$$

14. Dibuja la gráfica y halla la función inversa, si existe, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \text{ si } x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

15. Halla el valor de:

$$(a) \arcsin \frac{-1}{2} \quad (c) \arctan(-\sqrt{3}) \quad (e) \cos \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) \quad (g) \arctan \left(\tan \frac{5\pi}{6} \right) \\ (b) \arccos \frac{-1}{2} \quad (d) \cos \left(\arccos \frac{1}{2} \right) \quad (f) \sin \left(\arccos \frac{1}{2} \right) \quad (h) \arcsin \left(\sin \frac{-7\pi}{4} \right)$$

16. Simplifica las siguientes expresiones:

$$(a) y = \sin(\arccos x) \quad (b) y = \sin(2 \arccos x)$$

17. A partir de las gráficas de $y = e^x$ y de $y = e^{-x}$, haz un esbozo de las gráficas de $y = \sinh x$ e $y = \cosh x$. ¿Cuál es su imagen? ¿Están acotadas?

18. Demuestra que:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

CUESTIONES

- Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - El producto de dos funciones pares es una función par.
 - El producto de dos funciones impares es una función impar.
 - El producto de una función par por otra impar es una función impar.
 - La suma de dos funciones impares es una función par.
 - La suma de una función par con otra impar es una función impar.
 - La función $y = |f(x)|$ es siempre par.
 - La suma de dos funciones periódicas es una función periódica.
 - El producto de dos funciones periódicas es una función periódica.
- Si f es una función definida sobre toda la recta real, demuestra que $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par y que $h(x) = f(x) - f(-x)$ es impar.
 - Demuestra que toda función definida sobre toda la recta real se puede expresar como la suma de una función par y otra impar.
 - Expresa $y = e^x$ como suma de una función par y otra impar.
- ¿Qué funciones hiperbólicas son pares y cuáles impares?
- Razona bajo qué condiciones la función $y = |f(x)|$ es par.
- Si f es una función par y decreciente en $(-\infty, 0)$, ¿es f creciente o decreciente en $(0, +\infty)$?
- Sea f una función periódica de periodo T y $a > 0$. Estudia si son periódicas las funciones:

$$(a) y = a + f(x) \quad (b) y = f(ax) \quad (c) y = af(x)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Halla el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) y = \frac{1}{|x| - x} \quad (b) y = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad (c) y = \sqrt{x(x^2 - 1)} \quad (d) y = \sqrt{\sin x}$$
- Halla el dominio y la imagen de cada una de las siguientes funciones. Estudia también su acotación y calcula, si existen, el supremo, el ínfimo y sus extremos absolutos.

$$(a) f(x) = 2x - 1 \quad (b) f(x) = |x| \quad (c) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (d) f(x) = \sqrt{1-x} \quad (e) f(x) = 1 + \tan^2 x$$
- Halla el dominio, la imagen y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:
 - $E^+(x) = \text{ceil}(x) = [x]$ = menor entero mayor o igual que x .
 - Función redondeo: $\text{round}(x)$ = entero más próximo a x .
 - $\langle x \rangle = |x - \text{round}(x)|$ = distancia al entero más próximo a x .
- Se considera un círculo de radio r . Expresa:
 - La longitud de una cuerda en función de la distancia desde su punto medio al centro del círculo.
 - El perímetro de un triángulo isósceles inscrito en el círculo en función de la longitud del lado desigual (el triángulo debe contener al centro del círculo en su interior).

Halla el dominio e imagen de cada una de las funciones obtenidas.

5. Sean f y g dos funciones periódicas. ¿Son periódicas las funciones $f + g$ y fg ?
6. Sea f una función tal que $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x^2$. Halla una expresión de $f(x)$.
7. Sea $f(x) = \frac{3x-4}{2x-1}$. Halla una expresión simplificada de $f(f(2/x))$.
8. Estudia cuáles de las siguientes funciones son uno-a-uno y, en caso de que exista, calcula su inversa.

$$(a) f(x) = \frac{x+3}{x+5}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

9. Demuestra que la expresión $a \sin x + b \cos x$ se puede escribir como $A \sin(x + B)$.
10. Halla el dominio y la imagen de las funciones

$$y = \cot x \qquad y = \sec x \qquad y = \csc x$$

Estudia su periodicidad, acotación y simetrías. Haz un esbozo de sus gráficas.

11. Halla el valor de:

$$(a) \arccos \frac{1}{2} \qquad (b) \arctan 0 \qquad (c) \arcsin \left(\sin \frac{7\pi}{4} \right) \qquad (d) \arctan(\cos 0)$$

12. Simplifica las siguientes expresiones:

$$(a) y = \cos(\arcsin x)$$

$$(b) y = \sin(2 \arctan x)$$

13. Prueba que las funciones inversas de $y = \cosh x$ con $x \geq 0$, y de $y = \tanh x$ son, respectivamente:

$$\operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$