

<b>CÁLCULO INFINITESIMAL</b> <b>Curso 2008/2009, Grupo 2A</b>	1 <sup>er</sup> Apellido: _____	<b>28/05/2009</b>	
	2 <sup>o</sup> Apellido: _____	Tiempo: <b>2h</b>	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	<b>Calificación:</b> <table border="1" style="display: inline-table; width: 100px; height: 40px; vertical-align: middle;"></table>	
	Número de matrícula: <table border="1" style="display: inline-table; width: 100px; height: 20px; vertical-align: middle;"></table>		

**SEGUNDO PARCIAL DE JUNIO**

**SOLUCIONES**

1. Halla el límite de la sucesión:  $a_n = \log \left( \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} \right)^n$

**Solución:** Aplicando infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} \lim_n \log \left( \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} \right)^n &= (\log(1^\infty)) = \lim_n n \log \left( \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} \right) = (\infty \cdot 0) \stackrel{I}{=} \lim_n n \left( \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right) \\ &= \lim_n \frac{n(n-1)}{n^2 + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_n \frac{n^2}{n^2} = 1 \end{aligned}$$

2. Estudia la convergencia y calcula la suma de la serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

**Solución:** La convergencia de la serie se puede obtener del criterio de comparación:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^2}{n^2+n} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ es convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \text{ es convergente}$$

Puesto que  $a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , se trata de una serie telescópica cuya suma es:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} &= \lim_N \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \lim_N \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \right] = \lim_N \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

3. Halla el campo de convergencia de la serie de potencias:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n5^n}$

**Solución:** Se aplica el criterio de la raíz para hallar el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n5^n}} = \lim_n \frac{1}{5 \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{5} \implies R = 5 \implies \text{Int. Conv.: } (2-5, 2+5) = (-3, 7)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -3 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ (conv.)} \quad x = 7 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Puesto que la primera serie es convergente y la segunda divergente, el campo de convergencia de la serie de potencias es el intervalo  $[-3, 7)$ .

4. Una partícula sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^3 + 2t^2 + t + 1 \end{cases}, \quad t \geq 0$$

donde  $x$  e  $y$  se expresan en metros y  $t$  en segundos.

(a) Encuentra, si existen, los puntos en que corta a la bisectriz del primer cuadrante.

(b) Halla la velocidad con que pasa por los puntos obtenidos en el apartado anterior, así como la ecuación de la correspondiente recta tangente.

(c) Encuentra los puntos de tangencia horizontal y vertical.

**Solución:**

(a) Los puntos de la bisectriz del primer cuadrante tienen la misma abscisa y ordenada:

$$y = x \iff t^3 + 2t^2 + t + 1 = 2t + 3 \iff t^3 + 2t^2 - t - 2 = (t+2)(t+1)(t-1) = 0 \iff t = -2, -1, 1$$

Puesto que ha de ser  $t \geq 0$ , el único punto de corte de la trayectoria con la bisectriz del primer cuadrante se produce en el instante  $t = 1$ , y el punto de corte es  $(5, 5)$ .

(b) Llamando  $\alpha(t) = (2t+3, t^3+2t^2+t+1)$  al vector de posición de la partícula en cada instante  $t \geq 0$ , el vector velocidad o tangente en el instante  $t = 1$  es:

$$\alpha'(t) = (2, 3t^2 + 4t + 1) \implies \alpha'(1) = (2, 8) \parallel (1, 4)$$

La velocidad y la recta tangente a la trayectoria en el instante  $t = 1$  son:

$$\text{Velocidad: } \|\alpha'(1)\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \simeq 8,25 \text{ m/s} \quad \text{Recta tangente: } \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{4}$$

(c) Puesto que  $x'(t) = 2 \neq 0$ , e

$$y'(t) = 3t^2 + 4t + 1 = (3t+1)(t+1) = 0 \iff t = -1, -\frac{1}{3}$$

no tiene soluciones  $t \geq 0$ , no hay puntos de tangencia vertical ni horizontal.

5. Calcula el valor de la derivada direccional de la función  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$  en el punto  $(-1, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{u} = (-4, 3)$ .

**Solución:** El vector gradiente en el punto  $(-1, 1)$  es:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x \end{cases} \implies \nabla f(x, y) = (3x^2 - 2y, 2y - 2x) \implies \nabla f(-1, 1) = (1, 4)$$

y la derivada direccional en el punto  $(-1, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{u} = (-4, 3)$  es:

$$D_{\mathbf{u}}f(-1, 1) = \nabla f(-1, 1) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (1, 4) \cdot \frac{(-4, 3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{-4+12}{5} = \frac{8}{5}$$

6. Halla la ecuación general del plano tangente a la superficie  $x^2 + y \ln x + xz^2 = 10$  en el punto  $(1, -2, 3)$ .

**Solución:** En cada punto, el vector normal a la superficie y, por tanto, al plano tangente es el gradiente de la función  $F(x, y, z) = x^2 + y \ln x + xz^2 - 10$  en dicho punto, que es:

$$\nabla F(x, y, z) = \left( 2x + \frac{y}{x} + z^2, \ln x, 2xz \right) \implies \nabla F(1, -2, 3) = (9, 0, 6) \parallel (3, 0, 2)$$

La ecuación del plano tangente es  $3(x-1) + 0(y+2) + 2(z-3) = 0$ , es decir:  $3x + 2z = 9$ .

7. Una placa metálica rectangular de  $3 \times 2$  metros ocupa el rectángulo  $R = [0, 3] \times [0, 2]$  del plano cartesiano, siendo su temperatura en cada punto:  $T(x, y) = 24 + 20x + 12y - 5x^2 - 6y^2$ .

(a) A partir del punto  $(1, 1)$ , ¿en qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura de la placa? ¿Cuál es el ritmo de crecimiento?

(b) Halla los extremos relativos de la función  $T(x, y)$ .

(c) Encuentra los puntos de la placa donde se producen las temperaturas extremas (máxima y mínima) y su valor.

**Solución:**

(a) En cada punto, la temperatura de la placa aumenta más rápidamente en la dirección del gradiente:

$$\nabla T(x, y) = (20 - 10x, 12 - 12y) \implies \nabla T(1, 1) = (10, 0) \parallel (1, 0)$$

Por tanto, en el punto  $(1, 1)$  la temperatura de la placa aumenta más rápidamente en la dirección del vector  $(1, 0)$ , siendo su ritmo de crecimiento:  $\|\nabla T(1, 1)\| = \sqrt{100 + 0} = 10$  grados/metro.

(b) Para hallar los extremos relativos de la función  $T(x, y)$  se recurre a los puntos críticos y su clasificación mediante el hessiano:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 20 - 10x \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 12 - 12y \end{cases} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \implies \text{Punto crítico: } (2, 1)$$

$$H_T(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \implies |H_T(2, 1)| = 120 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(2, 1) = -10 < 0 \implies \\ \implies \text{Máximo relativo en } (2, 1) \text{ que vale } T(2, 1) = 50$$

(c) Para hallar los extremos absolutos de la función  $T(x, y)$  en  $R = [0, 3] \times [0, 2]$ , que existen por ser  $T$  continua y  $R$  compacto, hay que comparar el valor que toma la función en el extremo relativo, encontrado en el apartado anterior, con los valores extremos que alcanza en cada uno de los lados del rectángulo:

- En  $y = 0$  la temperatura de la placa viene dada por la función  $f(x) = T(x, 0) = 24 + 20x - 5x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$ . Puesto que  $f'(x) = 20 - 10x$  se anula en  $x = 2$  siendo positiva antes y negativa después, la función alcanza su máximo absoluto en dicho punto siendo su valor  $f(2) = 44$ . Los valores de la función en los extremos de definición son  $f(0) = 24$  y  $f(3) = 39$ . Por tanto, en este lado la temperatura máxima se alcanza en  $(2, 0)$  con valor  $T(2, 0) = 44$ , y la temperatura mínima se alcanza en  $(0, 0)$  con valor  $T(0, 0) = 24$ .
- En  $y = 2$  la temperatura de la placa viene dada por la función  $f(x) = T(x, 2) = 24 + 20x - 5x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , que es la misma del punto anterior y, por tanto, en este lado la temperatura máxima se alcanza en  $(2, 2)$  con valor  $T(2, 2) = 44$ , y la temperatura mínima se alcanza en  $(0, 2)$  con valor  $T(0, 2) = 24$ .
- En  $x = 0$  la temperatura de la placa viene dada por la función  $g(y) = T(0, y) = 24 + 12y - 6y^2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Puesto que  $g'(y) = 12 - 12y$  se anula en  $y = 1$  siendo positiva antes y negativa después, la función alcanza su máximo absoluto en dicho punto siendo su valor  $g(1) = 30$ . Los valores de la función en los extremos de definición son  $g(0) = 24$  y  $g(2) = 24$ . Por tanto, en este lado la temperatura máxima se alcanza en  $(0, 1)$  con valor  $T(0, 1) = 30$ , y la temperatura mínima se alcanza en  $(0, 0)$  y  $(0, 2)$  con valor  $T(0, 0) = T(0, 2) = 24$ .
- En  $x = 3$  la temperatura de la placa viene dada por la función  $h(y) = T(3, y) = 39 + 12y - 6y^2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Puesto que  $h'(y) = 12 - 12y$  se anula en  $y = 1$  siendo positiva antes y negativa después, la función alcanza su máximo absoluto en dicho punto siendo su valor  $h(1) = 45$ . Los valores de la función en los extremos de definición son  $h(0) = 39$  y  $h(2) = 39$ . Por tanto, en este lado la temperatura máxima se alcanza en  $(3, 1)$  con valor  $T(3, 1) = 45$ , y la temperatura mínima se alcanza en  $(3, 0)$  y  $(3, 2)$  con valor  $T(3, 0) = T(3, 2) = 39$ .

Después de comparar el extremo relativo de  $T$  con sus valores extremos en los lados del rectángulo, se observa que la temperatura máxima de la placa se alcanza en el punto  $(2, 1)$  con valor  $T(2, 1) = 50$  grados, y la temperatura mínima en los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 2)$  con valor  $T(0, 0) = T(0, 2) = 24$  grados.