CÁLCULO INFINITESIMAL **Curso 2008/2009, Grupo 2A**	1^{er} Apellido: ____________	**16/04/2009**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ____________ Nombre: ____________ Número de matrícula:	Tiempo: **1h 45m** **Calificación:**

EXAMEN ELIMINATORIO DE LA PRIMERA PARTE DEL SEGUNDO PARCIAL

SOLUCIONES

1. *Halla el valor del siguiente límite:* $\lim_n \dfrac{n^2}{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{n(n+1)}}$

Solución: Se aplica el criterio de Stolz y la jerarquía de infinitos:

$$\lim_n \frac{n^2}{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{n(n+1)}} \overset{St}{=} \lim_n \frac{n^2-(n-1)^2}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n+1)}} \overset{inf}{=} \lim_n \frac{2n}{n} = 2$$

2. *Demuestra que la sucesión recurrente:* $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\ , & n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ *es creciente y está acotada. ¿Cuál es su límite?*

Solución: Para probar el crecimiento y la acotación se aplica el principio de inducción matemática:

$$\text{Crecimiento: } \begin{cases} a_2 - a_1 = \sqrt{3}-1 > 0 \\ a_n - a_{n-1} > 0 \implies a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2+a_{n-1}}} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Acotación por 2: } \begin{cases} a_1 = 1 < 2 \\ a_n < 2 \implies a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2 \end{cases}$$

La existencia de límite queda garantizada porque la sucesión es creciente y acotada, y además debe ser un número positivo menor o igual que 2 (ya que todos los términos de la sucesión son positivos y menores que 2). Si l es el límite de la sucesión, tomando límites en la expresión de inducción se obtiene su valor:

$$l = \sqrt{2+l} \implies l^2 - l - 2 = 0 \implies l = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \implies l = \frac{1+3}{2} = 2$$

ya que la otra raíz es negativa.

3. *Determina el carácter de las siguientes series:* **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin^2 n}{n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Solución:

(a) Puesto que $\frac{1+\sin^2 n}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, la serie $\sum \frac{1+\sin^2 n}{n}$ es divergente.

(b) Puesto que es una serie alternada y $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es convergente.

4. *Halla el campo de convergencia de la siguiente serie de potencias:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solución: Se aplica el criterio de la raíz para hallar el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1 \implies R = 1 \implies \text{Int. Conv.: } (-1-1,\ -1+1) = (-2,\ 0)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ \text{(conv.)} \qquad\qquad x = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

Puesto que la primera serie es convergente y la segunda divergente, el campo de convergencia de la serie de potencias es el intervalo $[-2,\ 0)$.

5. *Halla el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen, y su campo de convergencia, de la función:*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Solución: Se obtiene, a partir de la serie geométrica, mediante derivación y producto por x:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots\,, \quad \text{si } |x| < 1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots\,, \quad \text{si } |x| < 1$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n\,, \quad \text{si } |x| < 1$$

En los extremos del intervalo de convergencia se obtienen series divergentes ($\sum(\pm 1)^n n$), por lo que el campo de convergencia es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

6. *Dos objetos siguen las trayectorias indicadas por las siguientes curvas:*

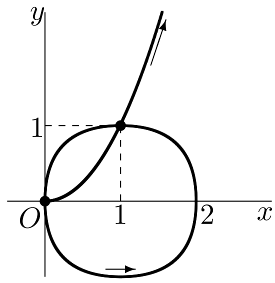
$$\text{Objeto A:} \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \ t \geq 0 \qquad \text{Objeto B:} \begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \ t \geq 0$$

(a) *Halla las ecuaciones cartesianas de las dos trayectorias y haz un esbozo de sus gráficas (indicando el origen y el sentido de recorrido).*
(b) *Encuentra los puntos de corte de sus trayectorias y determina si se encuentran en alguno de ellos.*
(c) *Halla el ángulo que forman las dos trayectorias en alguno de sus puntos de contacto distintos del origen (si existen).*
Solución:
(a) Las ecuaciones cartesianas de las trayectorias y un esbozo de sus gráficas son:

$$\text{Objeto A:} \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \ t \geq 0 \implies y^2 = x^3\,, \ \ y \geq 0$$

$$\text{Objeto B:} \begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, \ t \geq 0 \implies (x-1)^2 + y^2 = 1$$

La trayectoria del objeto A parte del origen y la del objeto B del punto $(1,\,1)$. Su sentido es el indicado en la gráfica.



(b) Para encontrar los puntos de corte de las trayectorias es más fácil considerar las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = x^3 \\ (x-1)^2 + x^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = x^3 \\ x(x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$$

Por tanto, los únicos puntos de corte de sus trayectorias son $(0,\,0)$ y $(1,\,1)$. Por el punto $(0,\,0)$ el objeto A pasa en el instante $t = 0$ y el objeto B en los instantes $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mientras que por el punto $(1,\,1)$ el objeto A pasa en el instante $t = 1$ y el objeto B en los instantes $t = 2k\pi$. En consecuencia, los dos objetos no se encuentran en ninguno de los puntos de corte de sus trayectorias.

(c) El único punto de contacto de las trayectorias distinto del origen es el punto (1, 1), por el que el objeto A pasa en el instante $t = 1$ y el objeto B en el instante $t = 0$. El ángulo que forman las trayectorias es el ángulo que forman sus vectores tangentes en dichos puntos. Los vectores tangentes son:

$$\text{Vector tangente al objeto A en } t = 1: \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \end{cases} \underset{t=1}{\Longrightarrow} \vec{u} = (2,\, 3)$$

$$\text{Vector tangente al objeto B en } t = 0: \quad \begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -\cos t \\ y' = -\sin t \end{cases} \underset{t=0}{\Longrightarrow} \vec{v} = (-1,\, 0)$$

El ángulo que forman las trayectorias en el punto (1, 1) es:

$$\alpha = \arccos \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \right| = \arccos \left| \frac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{1}} \right| = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$$

7. *Se construye una columna de cubos apilados (cada uno encima del anterior) de lados sucesivos:* 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ... *metros. Todos los cubos son huecos y están fabricados con cierto material rígido.*

(a) *¿Cuál es la altura de la columna?*

(b) *¿Qué cantidad de material es necesaria para la construcción de la columna?*

(c) *Si los cubos se llenan de agua, ¿qué cantidad de agua se puede almacenar en la columna completa?*

Solución: La columna está formada por los cubos Q_1, Q_2, Q_3, $\ldots$, donde el lado del cubo Q_n es $l_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. En consecuencia:

(a) La altura total de la columna es infinita:

$$\text{Altura} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{altura}(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

(b) La superficie total de la columna también es infinita:

$$\text{Superficie} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{superficie}(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 6 l_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n} = \infty$$

(c) Sin embargo, la cantidad de agua que se puede almacenar en la columna es finita:

$$\text{Volumen} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{volumen}(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$