

CÁLCULO INFINITESIMAL Curso 2008/2009, Grupo 2A	1 ^{er} Apellido: _____	17/02/2009	
	2 ^o Apellido: _____	Tiempo: 2h 30m	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	Calificación: <table border="1" style="display: inline-table; width: 100px; height: 40px; vertical-align: middle;"></table>	
	Número de matrícula: <table border="1" style="display: inline-table; width: 100px; height: 20px; vertical-align: middle;"></table>		

PRIMER PARCIAL DE FEBRERO

SOLUCIONES

1. Halla todos los números complejos que verifican simultáneamente:

$$\left| \frac{z-2}{z-6} \right| = 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{z-4i}{z-3} \right| = 2$$

Solución: Pasando a forma binómica, $z = x + iy$, de la primera condición se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-2}{z-6} \right| = 1 &\iff |z-2| = |z-6| \iff |(x-2) + iy|^2 = |(x-6) + iy|^2 \iff \\ &\iff (x-2)^2 + y^2 = (x-6)^2 + y^2 \iff x^2 - 4x + 4 = x^2 - 12x + 36 \iff x = 4 \end{aligned}$$

Imponiendo la segunda condición a $z = 4 + iy$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-4i}{z-3} \right| = 2 &\iff |z-4i| = 2|z-3| \iff |4 + (y-4)i|^2 = 4|1 + iy|^2 \iff \\ &\iff 16 + (y-4)^2 = 4(1 + y^2) \iff 16 + y^2 - 8y + 16 = 4 + 4y^2 \iff \\ &\iff 3y^2 + 8y - 28 = 0 \iff y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} = \frac{-8 \pm 20}{6} = \begin{cases} 2 \\ -14/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Los números complejos que verifican simultáneamente las dos condiciones son $z = 4 + 2i$ y $z = 4 - \frac{14}{3}i$.

2. Halla los siguientes límites: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}}$; (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln|x|}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Solución: (a) No existe, ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}} = \left(\frac{\infty}{1 + \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{e^{-1/x}} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}} = \left(\frac{0}{1 + 0} \right) = 0$$

(b) Usando jerarquía de infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln|x|}{\sqrt{1 + x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

3. Halla los siguientes límites: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Solución: Usando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x} = 1 \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = 3 \end{aligned}$$

4. Halla el polinomio de McLaurin de grado 3 de la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$, y úsalo para hallar el valor aproximado de la función en $x = 0,1$.

Solución: Se calculan las tres primeras derivadas:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1} \quad f'(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2} \quad f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3} \quad f'''(x) = \frac{-18}{(x+1)^4}$$

y su valor en $x = 0$, que es: $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = 6$ y $f'''(0) = -18$. El polinomio de McLaurin de grado 3 de la función f en $x = 0$ es:

$$P_3(x) = 2 - 2x + \frac{6}{2!}x^2 - \frac{18}{3!}x^3 = 2 - 2x + 3x^2 - 3x^3$$

Usando este polinomio, un valor aproximado de la función f en $x = 0,1$ es:

$$f(0,1) \simeq P_3(0,1) = 2 - 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1^2 - 3 \cdot 0,1^3 = 2 - 0,2 + 0,03 - 0,003 = 1,827$$

5. Halla el valor de las siguientes integrales impropias: (a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$; (b) $\int_0^\infty \frac{dx}{2+x^2}$.

Solución: En primer lugar se calculan primitivas de cada una de las funciones:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad \int \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

Entonces:

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(0 - \frac{(\ln \varepsilon)^2}{2} \right) = -\infty$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{dx}{2+x^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{dx}{2+x^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{r}{\sqrt{2}} - 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

6. Entre dos regiones A y B se construye una tubería para conducción de agua cuya capacidad, en m^3/seg a los t años de su construcción, viene dada por la función:

$$V(t) = \begin{cases} at^2 & , \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ a\sqrt{t-1} - b & , \text{ si } 1 \leq t < 5 \\ \frac{t-b}{t-3} & , \text{ si } t \geq 5 \end{cases}$$

(a) Sabiendo que la capacidad varía continuamente con el tiempo, ¿cuáles son los valores de a y b ?

(b) Haz un esbozo de la gráfica de V .

(c) Deduce de la gráfica la capacidad máxima y cuándo se alcanza.

(d) Describe cómo es la evolución de la capacidad del trasvase respecto del tiempo.

Solución: (a) Si la capacidad de la tubería varía continuamente con el tiempo, la función V debe ser continua y, para ello, se necesita que los límites laterales en $t = 1$ y $t = 5$ coincidan. Imponiendo esta condición se obtienen los valores de a y b , que son:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} V(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} V(t) \iff \lim_{t \rightarrow 1^-} at^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} (a\sqrt{t-1} - b) \iff a = -b \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} V(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} V(t) \iff \lim_{t \rightarrow 5^-} (a\sqrt{t-1} - b) = \lim_{t \rightarrow 5^+} \frac{t-b}{t-3} \iff 2a - b = \frac{5-b}{2} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

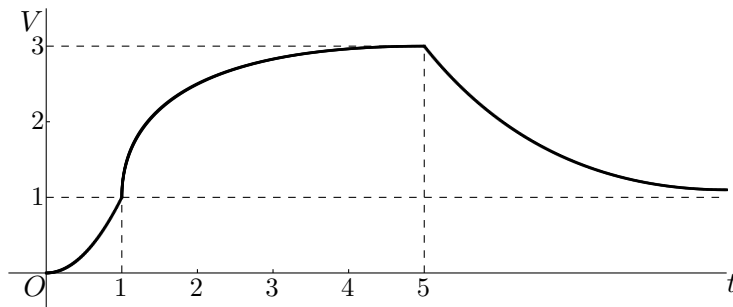
(b) Se calcula la derivada de la función V :

$$V(t) = \begin{cases} t^2 & , \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \sqrt{t-1} + 1 & , \text{ si } 1 \leq t < 5 \\ \frac{t+1}{t-3} & , \text{ si } t \geq 5 \end{cases} \implies V'(t) = \begin{cases} 2t & , \text{ si } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{t-1}} & , \text{ si } 1 < t < 5 \\ \frac{-4}{(t-3)^2} & , \text{ si } t > 5 \end{cases}$$

No es derivable en los puntos de cambio, ya que $V'(1^-) = 2$, $V'(1^+) = +\infty$, $V'(5^-) = \frac{1}{4}$ y $V'(5^+) = -1$. El crecimiento de la función se deduce de la derivada:

$$\begin{cases} V'(t) > 0 & , \text{ si } t \in [0, 1) \cup (1, 5) \\ V'(t) < 0 & , \text{ si } t \in (5, +\infty) \end{cases} \implies \begin{cases} V \text{ es creciente cuando } t \in [0, 1) \cup (1, 5) \\ V \text{ es decreciente cuando } t \in (5, +\infty) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta también que $V(0) = 0$, $V(1) = 1$, $V(5) = 3$ y que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 1$, un esbozo de su gráfica es la de la figura:



- (c) La capacidad máxima es de $3 \text{ m}^3/\text{seg}$ y se alcanza a los $t = 5$ años de la construcción de la tubería.
 (d) La capacidad del trasvase aumenta hasta los 5 años, en que consigue su capacidad máxima de $3 \text{ m}^3/\text{seg}$, y luego disminuye continuamente hacia $1 \text{ m}^3/\text{seg}$ (sin llegar a alcanzarlo).

7. Se dispone de un total de 4 metros de alambre para construir un cuadrado y un círculo. ¿Cuáles deben ser el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea máxima?

Solución: Para construir un cuadrado de lado l y un círculo de radio r se necesitan $4l + 2\pi r$ metros de alambre, siendo la suma de sus áreas: $l^2 + \pi r^2$. Por tanto, si se dispone de un total de 4 metros de alambre, la suma de sus áreas en función del radio del círculo es:

$$\begin{cases} 4l + 2\pi r = 4 \\ A = l^2 + \pi r^2 \end{cases} \implies \begin{cases} l = 1 - \frac{\pi r}{2} \\ A(r) = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 \end{cases}$$

El dominio de la función se obtiene de que tanto el radio como el lado deben ser no negativos:

$$\begin{cases} l = 1 - \frac{\pi r}{2} \geq 0 \\ r \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} r \leq \frac{2}{\pi} \\ r \geq 0 \end{cases} \implies 0 \leq r \leq \frac{2}{\pi}$$

Ahora se debe calcular el máximo absoluto de la función $A(r) = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2$ en el intervalo $[0, \frac{2}{\pi}]$. El único punto crítico de la función en ese intervalo es:

$$A'(r) = 2\left(1 - \frac{\pi r}{2}\right) \frac{-\pi}{2} + 2\pi r = \pi \left[\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r - 1 \right] \quad A'(r) = 0 \iff r = \frac{1}{2 + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi + 4}$$

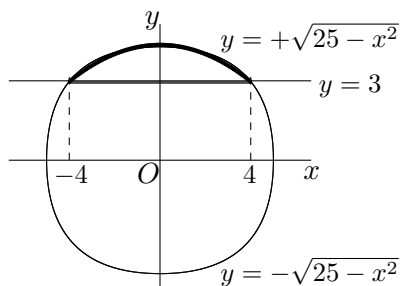
y, puesto que $A''(r) = \pi \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) > 0$, se trata de un mínimo relativo, que también es absoluto al ser el único punto crítico de una función derivable definida en un intervalo. El máximo absoluto se alcanza en uno de los extremos del intervalo de definición. Puesto que:

$$\begin{cases} A(0) = 1 \\ A\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi} > 1 \end{cases} \implies \text{El máximo absoluto se alcanza en } r = \frac{2}{\pi}$$

Por tanto, la suma de las área es máxima cuando el radio es $r = \frac{2}{\pi}$ y el lado $l = 0$, es decir, cuando todo el alambre se usa para construir el círculo.

8. Un fabricante diseña un objeto que se obtiene taladrando una esfera de 5 cm de radio mediante un orificio de 3 cm de radio centrado a lo largo de uno de los diámetros de la esfera. ¿Cuál es el volumen del objeto obtenido?

Solución: El objeto se puede obtener mediante revolución del sector de circunferencia de radio 5 m y altura $5 - 3 = 2$ m, es decir, determinado por una recta que dista 3 m del origen.



$$x^2 + y^2 = 5^2 \implies y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = 3 \end{cases} \implies x = \pm 4$$

Usando simetría, el volumen del objeto obtenido es:

$$V = 2\pi \int_0^4 \left[\left(\sqrt{25 - x^2} \right)^2 - 3^2 \right] dx = 2\pi \int_0^4 (16 - x^2) dx = 2\pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{256\pi}{3} \text{ u}^3$$