

CÁLCULO INFINITESIMAL Curso 2008/2009, Grupo 2A	1 ^{er} Apellido: _____	27/11/2008	
	2 ^o Apellido: _____	Tiempo: 1h 45m	B
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	Calificación: 	
	Número de matrícula: 		

Examen eliminatorio de la primera parte del Primer Parcial

SOLUCIONES

1. (1,5 puntos)

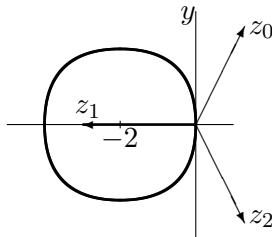
- (a) Describe geoméricamente el conjunto plano de ecuación $|z + 2| = 2$. Halla sus ecuaciones cartesianas.
- (b) Halla todas las raíces (reales y complejas) de la ecuación $z^3 + 27 = 0$, diciendo cuáles de ellas se encuentran en el recinto $|z + 2| < 2$.

Solución:

(a) Es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a $(-2, 0)$ es 2, es decir, es la circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2. Sus ecuaciones cartesianas son: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ ó, desarrollando, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

(b) Las raíces de la ecuación son:

$$z^3 + 27 = 0 \iff z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27e^{i\pi}} = 3e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} \implies \begin{cases} k = 0 \implies z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \\ k = 1 \implies z_1 = 3e^{i\pi} = -3 \\ k = 2 \implies z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$



La única raíz en el recinto $|z + 2| < 2$, que es el interior de la circunferencia, es $z_1 = -3$.

2. (0,5 puntos) Halla el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\log(x+3)}$.

Solución: El dominio se obtiene directamente de las condiciones que debe verificar x para que la función esté definida:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \iff x \leq 2 \\ x + 3 > 0 \iff x > -3 \\ x + 3 \neq 1 \iff x \neq -2 \end{cases} \quad \text{El dominio es: } D = (-3, -2) \cup (-2, 2]$$

3. (1 punto) Usando infinitésimos, calcula el valor del siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x^2}}{1 - \cos x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x^2}}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{I}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 1$$

4. (1 punto) Halla los límites en el infinito ($-\infty$ y $+\infty$) de la función: $f(x) = \frac{x + \cos x}{x^2 + 2^x}$.

Solución: Usando órdenes de infinitud:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2^x} = \left(\frac{-\infty + \text{acotado}}{\infty + 0} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2^x} = \left(\frac{\infty + \text{acotado}}{\infty + \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0$$

5. (1 punto) Estudia la continuidad (clasificando sus discontinuidades) de la función $f(x) = \frac{(x^3 + 1)e^{-1/x}}{x + 1}$.

Solución: La función es continua en su dominio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. En los puntos de discontinuidad, los límites son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0 + 1}{0 + 1} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0 + 1}{0 + 1} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = e \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = e \left(\frac{0}{0} \right) = e \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3e$$

de donde se deduce que la discontinuidad en $x = 0$ es esencial y en $x = -1$ es evitable.

6. (2,5 puntos) Una empresa que fabrica un determinado producto tiene unos costes de fabricación, distribución y venta proporcionales al cuadrado del número total de unidades que fabrica y vende. Se sabe que los costes de 1000 unidades son 100 euros.

- (a) Si cada unidad del producto la vende a 100 euros, encuentra la función que da los beneficios obtenidos por la empresa en la fabricación y venta de x unidades.
 (b) Representa gráficamente la función obtenida.
 (c) ¿Cuáles son los beneficios máximos que puede obtener la empresa y con cuántas unidades los obtiene?
 (d) ¿Cuál es el número máximo de unidades que puede fabricar y vender sin entrar en pérdidas?

Solución: Los costes de fabricación, distribución y venta de x unidades son $C(x) = kx^2$, siendo:

$$C(1000) = k \cdot 1000^2 = 10^6 k = 100 \iff k = 10^{-4}$$

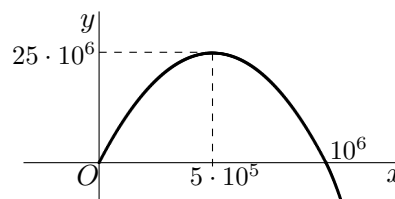
Por tanto, los costes de fabricación, distribución y venta de x unidades son: $C(x) = 10^{-4}x^2$ euros.

(a) Si cada unidad del producto se vende a 100 €, los ingresos por la venta de x unidades son $I(x) = 100x$, y los beneficios obtenidos por la empresa son:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 100x - 10^{-4}x^2 = -10^{-4}x(x - 10^6)$$

Aunque en realidad la variable x sólo puede tomar valores enteros, podemos admitir que el dominio de la función B es: $D(B) = [0, +\infty)$.

- (b) La representación gráfica de la función B es una parábola con la curvatura hacia abajo, con $B(0) = B(10^6) = 0$ y, por simetría, con vértice en $x = 5 \cdot 10^5$ con $B(5 \cdot 10^5) = 25 \cdot 10^6$.
 (c) Los beneficios máximos son 25 millones de euros, con la venta de 500.000 unidades.



- (d) Entra en pérdidas cuando fabrica y vende más de un millón unidades.

7. (2,5 puntos) El jefe de compras de una gran cadena comercial establece con cierta gran fábrica el precio de compra de cierto producto a 2€ el kilo, mientras que como labor social se ha visto obligado a comprar 1000 kilos del mismo producto a una ONG al precio 5€ el kilo.

- (a) Expresa el valor promedio de compra de cada kilo del producto en función del número de kilos que compra a la gran fábrica.
- (b) Hallando el dominio y asíntotas de la función obtenida, haz un esbozo de su gráfica.
- (c) ¿Puede llegar a ser el valor promedio de compra de 2,1€? ¿Cuántos kilos debe comprar a la gran fábrica para que ello ocurra? ¿Podría el valor promedio llegar a 2€? ¿Qué valores puede tomar el valor promedio?

Solución: (a) Si compra x kilos a 2€ y 1000 kilos a 5€, el valor promedio de compra de cada kilo es:

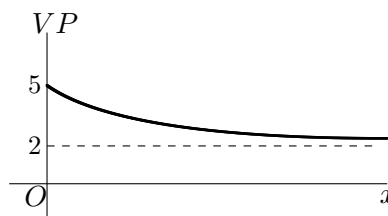
$$VP(x) = \frac{x \cdot 2 + 1000 \cdot 5}{x + 1000} = \frac{2x + 5000}{x + 1000}$$

(b) El dominio de la función obtenida es el conjunto de todos los reales positivos, $D(VP) = [0, +\infty)$, donde la función es continua y, por tanto, no tiene asíntotas verticales. Un esbozo de la gráfica es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} VP(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5000}{x + 1000} = 2$$

↓

$y = 2$ es asíntota horizontal en $+\infty$



(c) El valor promedio puede llegar a ser 2,1€, y ocurre cuando la gran cadena compra:

$$VP(\alpha) = \frac{2\alpha + 5000}{\alpha + 1000} = 2,1 \iff 2\alpha + 5000 = 2,1\alpha + 2100 \iff \alpha = \frac{2900}{0,1} = 29000 \text{ kilos}$$

La función VP decrece aproximándose a la asíntota $y = 2$ pero nunca la alcanza, de donde se deduce que el valor promedio nunca puede llegar a ser de 2€.

El valor promedio puede tomar cualquier valor mayor que 2€ y menor o igual que 5€.