CÁLCULO INFINITESIMAL **Curso 2008/2009, Grupo 2A**	1^{er} Apellido: ______________ 2^{o} Apellido: ______________	**08/06/2009** Tiempo: **1h 15m**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________ Número de matrícula:	**Calificación:**

EXAMEN FINAL DE JUNIO (Segundo parcial) **SOLUCIONES**

1. (1 punto) *Determina el punto de la curva $\{x = 2t + 3,\ y = t^2\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ en el que el vector tangente es perpendicular al vector de posición. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en dicho punto?*
Solución: El vector de posición de cada punto de la curva es $\alpha(t) = (2t + 3,\ t^2)$, y el vector tangente es $\alpha'(t) = (2,\ 2t)$. Estos vectores son perpendiculares si su producto es calar es cero:

$$\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = (2t + 3,\ t^2) \cdot (2,\ 2t) = 2(2t + 3) + 2t^3 = 2(t + 1)(t^2 - t + 3) = 0 \iff t = -1$$

Por tanto, el único punto donde son perpendiculares el vector tangente y el de posición es $\alpha(-1) = (1,\ 1)$. Puesto que el vector tangente en dicho punto es $\alpha'(-1) = (2, -2) \parallel (1, -1)$, la ecuación de la recta tangente es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}$, es decir, $x + y = 2$.

2. (1 punto) *Estudia la convergencia y halla la suma de la serie numérica:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}$
Solución: Esta serie es convergente ya que se puede expresar como la diferencia entre dos series geométricas convergentes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{-1}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

3. (1 punto) *Halla el desarrollo en serie de potencias, y su campo de convergencia, de la función $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$ en $x = 0$.*
Solución: Se puede obtener a partir de la serie de potencias de primer término 1 y razón $-x$ como se indica a continuación:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad , \quad |x| < 1$$

Derivando: $$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \dots \quad , \quad |x| < 1$$

Cambiando de signo: $$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad , \quad |x| < 1$$

Multiplicando por $-x$: $$\frac{-x}{(1+x)^2} = -x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - \dots \quad , \quad |x| < 1$$

Sumando las dos últimas: $$f(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^n \quad , \quad |x| < 1$$

4. (1 punto) *Si el radio y la altura de un cilindro circular recto se miden con posibles errores de 4% y 2%, respectivamente, ¿cuál es el error relativo que se puede cometer al medir el volumen?*
Solución: El volumen de un cilindro de radio r y altura h es $V(r, h) = \pi r^2 h$. Un error del 4% y 2% al medir el radio y la altura suponen un error relativo del $0,04$ y $0,02$, respectivamente. Entonces, usando la diferencial para aproximar la función, el error relativo que se puede cometer al medir el volumen es:

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h}{V} = \frac{2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \cdot 0,04 + 0,02 = 0,1$$

Por tanto, al hallar el volumen se puede cometer un error del 10%.

5. (1 punto) *Un fabricante de artículos electrónicos determina que los beneficios obtenidos con la fabricación de x unidades de un reproductor de DVD e y unidades de un grabador de DVD vienen dados por la función*

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0,001(x^2 + xy + y^2) - 10000 \text{ euros}$$

¿Cuántas unidades debe fabricar de cada producto para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es?

Solución: El dominio de la función es $D = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, es decir, el primer cuadrante del plano cartesiano. Para hallar los extremos relativos se calculan los puntos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 8 - 0,001(2x+y) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 10 - 0,001(x+2y) \end{cases} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 8000 \\ x + 2y = 10000 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2000 \\ y = 4000 \end{cases}$$

Se clasifica el punto crítico mediante el Hessiano:

$$H_P(x,y) = \begin{pmatrix} -0,002 & -0,001 \\ -0,001 & -0,002 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H_P(2000,4000)| = 3 \cdot 10^{-6} > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -0,002 < 0$$

Es decir, en (2000, 4000) la función alcanza un máximo relativo, cuyo valor es $P(2000,4000) = 18000$. El valor de este máximo hay que compararlo con los valores máximos que alcanza la función en la frontera:

- Cuando $y = 0$ la función es $f(x) = P(x,0) = 8x - 0,001x^2 - 10000$, que es una parábola con curvatura hacia abajo que alcanza su máximo absoluto en el vértice $x = 4000$, cuyo valor es $f(4000) = P(4000, 0) = 6000$.
- Cuando $x = 0$ la función es $g(y) = P(0,y) = 10y - 0,001y^2 - 10000$, que es una parábola con curvatura hacia abajo que alcanza su máximo absoluto en el vértice $y = 5000$, cuyo valor es $g(5000) = P(0, 5000) = 15000$.
- Cuando x o y tienden a infinito la función tiende a $-\infty$ ya que mandan los términos de segundo grado (que tienen signo menos).

Por tanto, el máximo absoluto de la función se alcanza en el punto (2000, 4000) y su valor es 18000. Traducido al contexto del problema, el máximo beneficio es de 18.000 euros y se alcanza cuando se fabrican 2.000 reproductores y 4.000 grabadores.