

| | | | |
|---|---|---|--|
| CÁLCULO INFINITESIMAL Curso 2007/2008, Grupo 3 | 1 ^{er} Apellido: _____ | 14/04/2008 | |
| | 2 ^o Apellido: _____ | Tiempo: 1h 30m | |
| Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid | Nombre: _____ | Calificación: | |
| | Número de matrícula: | | |

Examen eliminatorio de la primera parte del Segundo Parcial

SOLUCIONES

1. Halla el valor del siguiente límite: $\lim_n \frac{(2n+1)^2}{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{1+2^2} + \dots + \sqrt{1+n^2}}$

Solución: Se aplica el criterio de Stolz y la jerarquía de infinitos:

$$\lim_n \frac{(2n+1)^2}{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{1+2^2} + \dots + \sqrt{1+n^2}} \stackrel{St}{=} \lim_n \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{\sqrt{1+n^2}} = \lim_n \frac{8n}{\sqrt{1+n^2}} \stackrel{inf}{=} \lim_n \frac{8n}{n} = 8$$

2. Demuestra que la sucesión recurrente: $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, & n \geq 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ es creciente y está acotada por

2. ¿Cuál es su límite?

Solución: Para probar el crecimiento y la acotación se aplica el principio de inducción matemática:

$$\text{Crecimiento: } \begin{cases} a_2 - a_1 = 1 - 0 = 1 > 0 \\ a_n - a_{n-1} > 0 \implies a_{n+1} - a_n = \sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Acotación por 2: } \begin{cases} a_1 = 0 < 2 \\ a_n < 2 \implies a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2 \end{cases}$$

La existencia de límite queda garantizada porque la sucesión es creciente y acotada, y además debe ser un número positivo menor o igual que 2 (ya que todos los términos de la sucesión son positivos y menores que 2). Si l es el límite de la sucesión, tomando límites en la expresión de inducción se obtiene su valor:

$$l = \sqrt{1+l} \implies l^2 - l - 1 = 0 \implies l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$$

ya que la otra raíz es negativa.

3. Determina el carácter de las siguientes series numéricas: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n^2}{n^2}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

Solución:

(a) Puesto que $0 \leq \frac{\sin^2 n^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, la serie $\sum \frac{\sin^2 n^2}{n^2}$ es convergente.

(b) Puesto que es una serie alternada y $\lim \frac{1}{\log n} = 0$, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ es convergente.

4. Halla el campo de convergencia de la siguiente serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

Solución: Se aplica el criterio de la raíz para hallar el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1 \implies R = 1 \implies \text{Int. Conv.: } (2-1, 2+1) = (1, 3)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \quad x = 3 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ (conv.)}$$

Puesto que la primera serie es divergente y la segunda convergente, el campo de convergencia de la serie de potencias es el intervalo $(1, 3]$.

5. Halla el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen, y su campo de convergencia, de la función:

$$f(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

Solución: Se obtiene, a partir de la serie geométrica, mediante derivación, producto por x y suma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \\ \left(\frac{1}{1+x}\right)' &= \frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \\ \frac{-x}{(1+x)^2} &= -x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{-x}{(1+x)^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^n, \quad \text{si } |x| < 1$$

En los extremos del intervalo de convergencia se obtienen series divergentes ($\sum (\pm 1)^n (2n+1)$), por lo que el campo de convergencia es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

6. Dos objetos siguen las trayectorias indicadas por las siguientes curvas:

$$\text{Objeto A: } \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \geq 0 \qquad \text{Objeto B: } \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

(a) Halla las ecuaciones cartesianas de las dos trayectorias y haz un esbozo de sus gráficas (indicando el origen y el sentido de recorrido).

(b) Encuentra los puntos de corte de sus trayectorias y determina si se encuentran en alguno de ellos.

(c) Halla el ángulo que forman las dos trayectorias en alguno de sus puntos de contacto distintos del origen (si existen).

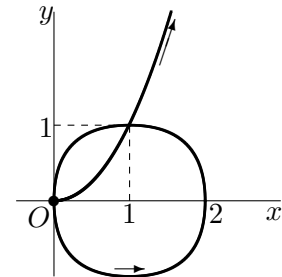
Solución:

(a) Las ecuaciones cartesianas de las trayectorias y un esbozo de sus gráficas son:

$$\text{Objeto A: } \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \geq 0 \implies y^2 = x^3, \quad y \geq 0$$

$$\text{Objeto B: } \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}, \quad t \geq 0 \implies (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Ambas trayectorias parten del origen y su sentido es el indicado en la gráfica.



(b) Para encontrar los puntos de corte de las trayectorias es más fácil considerar las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = x^3 \\ (x-1)^2 + x^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = x^3 \\ x(x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$$

Por tanto, los únicos puntos de corte de sus trayectorias son $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Por el punto $(0, 0)$ los dos objetos pasan en el instante $t = 0$, mientras que por el punto $(1, 1)$ el objeto A pasa en el instante $t = 1$ y el objeto B en los instantes $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. En consecuencia, los dos objetos parten en el mismo instante del mismo punto y no se vuelven a encontrar.

(c) El único punto de contacto de las trayectorias distinto del origen es el punto $(1, 1)$, por el que el objeto A pasa en el instante $t = 1$ y el objeto B en el instante $t = \frac{3\pi}{2}$. El ángulo que forman las trayectorias es el ángulo que forman sus vectores tangentes en dichos puntos. Los vectores tangentes son:

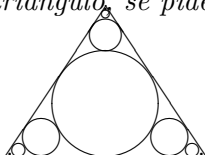
$$\text{Vector tangente al objeto A en } t = 1: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \end{cases} \xrightarrow{t=1} \vec{u} = (2, 3)$$

$$\text{Vector tangente al objeto B en } t = \frac{3\pi}{2}: \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = -\sin t \end{cases} \begin{cases} x' = \sin t \\ y' = -\cos t \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{3\pi}{2}} \vec{v} = (-1, 0)$$

El ángulo que forman las trayectorias en el punto $(1, 1)$ es:

$$\alpha = \arccos \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right| = \arccos \left| \frac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{1}} \right| = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$$

7. En un triángulo equilátero de lado 1 metro se empaquetan una cantidad infinita de círculos como se indica en la figura. El más grande se llamará círculo de la primera generación, los tres siguientes círculos de la segunda generación, los tres siguientes círculos de la tercera generación, y así sucesivamente. Teniendo en cuenta que el radio del círculo inscrito en un triángulo equilátero es un tercio de la altura del triángulo, se pide:



- (a) Calcula la longitud de los radios de los círculos de las sucesivas generaciones. Identifica el tipo de sucesión que determinan y halla su límite.
 (b) Halla la suma de los radios de los círculos de todas las generaciones y compara el valor obtenido con la altura del triángulo.

(c) Halla el área que ocupan los círculos de cada generación. Identifica el tipo de sucesión que determinan y halla su límite.

(d) Calcula el área ocupada por todos los círculos empaquetados. Compara el valor obtenido con el área del triángulo, y extrae conclusiones.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que la altura de un triángulo de lado l es $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, la altura del triángulo inicial es $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y el radio del círculo de la primera generación es $r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Los círculos de las sucesivas generaciones están inscritos en triángulos equiláteros cuyos lados forman una progresión geométrica de razón $1/3$, luego sus radios también forman una progresión geométrica de la misma razón:

$$r_n = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n} \quad \text{y} \quad \lim_n r_n = \lim_n \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n} = 0$$

(b) La suma de los radios de los círculos de todas las generaciones es la mitad de la altura del triángulo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(c) Hay un sólo un círculo de la primera generación y tres de las restantes, luego el área que ocupan es:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \frac{3\pi}{2^2 3^2} = \frac{\pi}{12} \quad A_n = 3\pi r_n^2 = \frac{9\pi}{2^2 3^{2n}} = \frac{\pi}{4 \cdot 9^{n-1}}, \quad n > 1 \quad \lim_n A_n = \lim_n \frac{\pi}{4 \cdot 9^{n-1}} = 0$$

A partir de $n > 1$, la sucesión de áreas forma una progresión geométrica de razón $1/9$.

(d) El área ocupada por todos los círculos empaquetados es:

$$A = A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{32} = \frac{11\pi}{96} \simeq 0,36$$

mientras que el área del triángulo original es $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0,43$, lo que supone que los círculos ocupan un $\frac{0,36}{0,43} \cdot 100 \simeq 84\%$ del área del triángulo.