CÁLCULO INFINITESIMAL **Curso 2007/2008, Grupo 3**	1^{er} Apellido: ____________ 2^{o} Apellido: ____________	**22/11/2007**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	Tiempo: **1h 45m** **B** **Calificación:**

Examen eliminatorio de la primera parte del Primer Parcial

1. (1,5 puntos)

(a) *Halla la forma binómica del número complejo:* $w = \frac{1+3i}{3-i} - (1+2i)^2$

(b) *Describe el lugar geométrico de todos los números complejos* z *que verifican:* $|z+1-3i| = |w|$, *donde* w *es el número complejo del apartado anterior. Escribe sus ecuaciones cartesianas.*

Solución: **(a)** Operando en forma binómica (teniendo en cuenta que $i^2 = -1$):

$$w = \frac{1+3i}{3-i} - (1+2i)^2 = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - (1+4i-4) = \frac{3+i+9i-3}{9+1} - (-3+4i) = \frac{10i}{10} + 3 - 4i = 3 - 3i$$

(b) Puesto que $|w| = |3-3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$, se trata de describir el lugar geométrico de todos los números complejos z que verifican:

$$|z - (-1+3i)| = \sqrt{18}$$

que es la circunferencia de centro $(-1,\, 3)$ y radio $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, cuya ecuación cartesiana es:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 18$$

2. (1 punto) *Halla todas las soluciones (reales y complejas) de la ecuación:* $z^4 + 3z^3 + 8z + 24 = 0$.

Solución: Teniendo en cuenta que:

$$z^4 + 3z^3 + 8z + 24 = 0 = z^3(z+3) + 8(z+3) = (z^3+8)(z+3) = 0 \iff \begin{cases} z+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -3 \\ z^3 + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 = -8 \end{cases}$$

y que

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{2^3 e^{i\pi}} = 2e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}} = \begin{cases} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i \\ 2e^{i\pi} = -2 \\ 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

las cuatro soluciones de la ecuación son: $z = -3$, $z = -2$, $z = 1 + \sqrt{3}i$ y $z = 1 - \sqrt{3}i$.

3. (1 punto) *Calcula el valor del siguiente límite:* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin 3x}$

Solución: Usando infinitésimos dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{I}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{3x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{I}{=} \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \frac{1}{6}$$

4. (1 punto) *Halla los límites en el infinito ($-\infty$ y $+\infty$) de la función:* $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln|x| - e^{-x}}{x^2 - \ln|x| + e^{-x}}$.

Solución: Usando órdenes de infinitud:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + \ln|x| - e^{-x}}{x^2 - \ln|x| + e^{-x}} = \left(\frac{\infty + \infty - \infty}{\infty - \infty + \infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \ln|x| - e^{-x}}{x^2 - \ln|x| + e^{-x}} = \left(\frac{\infty + \infty - 0}{\infty - \infty + 0}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

5. (1 punto) *Estudia la continuidad (clasificando sus discontinuidades) de la función* $f(x) = \dfrac{(x-1)e^{1/x}}{x^3 - 1}$.

Solución: La función es continua en su dominio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$. En los puntos de discontinuidad, los límites son:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{0-1}{0-1} \lim_{x\to0^-} e^{1/x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0-1}{0-1} \lim_{x\to0^+} e^{1/x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = e \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^3-1} = e\left(\frac{0}{0}\right) = e \lim_{x\to1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{e}{3}$$

de donde se deduce que la discontinuidad en $x = 0$ es esencial y en $x = 1$ es evitable.

6. (2 puntos) *El precio de cada bloque de cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Se dispone de un bloque de 20 kg que cuesta 800€.*

(a) *Si el bloque se rompe en dos trozos, expresa su valor en función del tamaño de uno de ellos. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?*

(b) *Representa gráficamente la función obtenida, y demuestra a partir de ella que cualquier ruptura produce depreciación. ¿Cuál es la partición que produce la máxima depreciación?*

Solución: El precio de un bloque de x kg es $P(x) = kx^2$, siendo:

$$P(20) = k \cdot 20^2 = 400k = 800 \iff k = 2$$

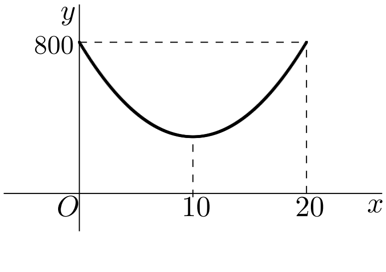
Por tanto, el precio de un bloque de x kg es: $P(x) = 2x^2$ euros.

(a) Si el bloque de 20 kg se rompe en dos trozos, de tamaños x y $20 - x$, su precio es:

$$f(x) = P(x) + P(20-x) = 2x^2 + 2(20-x)^2 = 2(x^2 + 400 - 40x + x^2) = 4(x^2 - 20x + 200)$$

Puesto que x es el peso de un trozo proveniente de un bloque de 20 kg, el dominio de la función f es: $D(f) = [0,\, 20]$.

(b) La representación gráfica de la función f es una parábola con la curvatura hacia arriba, con $f(0) = f(20) = 800$ y, por simetría, con vértice en $x = 10$, como se observa en la figura:



$f(x) < f(0),\ \forall x \in (0, 20) \implies$ cualquier ruptura deprecia

Máxima depreciación en $x = 10$, es decir cuando el bloque se parte en dos trozos iguales.

7. (2,5 puntos) *El encargado de un restaurante compra 10 kilos de naranjas tipo A a 1,18€ por kilo, y un cierto número de naranjas tipo B a 0,94€ por kilo.*

(a) *Expresa el valor promedio del kilo de naranjas en función del número de kilos que compra del tipo B.*

(b) *Hallando el dominio y asíntotas de la función obtenida, haz un esbozo de su gráfica.*

(c) *Justifica teóricamente que comprando cierto número de kilos de naranjas del tipo B el valor promedio del kilo puede ser de 1€. ¿De cuántos kilos se trata? ¿Podría el valor promedio llegar a valer 0,94€?*

Solución: (a) Si compra 10 kilos de naranjas a 1,18€ y x kilos de naranjas a 0,94€, el valor promedio de cada kilo de naranjas es:

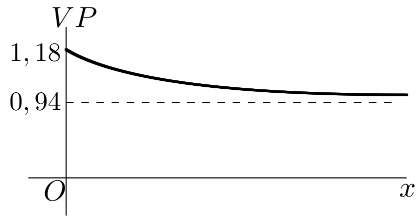
$$VP(x) = \frac{10 \cdot 1,18 + x \cdot 0,94}{10 + x} = \frac{0,94x + 11,8}{x + 10}$$

(b) El dominio es el conjunto de todos los reales positivos, $D(VP) = [0, +\infty)$, donde la función es continua y, por tanto, no tiene asíntotas verticales. Un esbozo de la gráfica es:

$$\lim_{x \to +\infty} VP(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{0,94x + 11,8}{x + 10} = 0,94$$

$$\Downarrow$$

$y = 0,94$ es asíntota horizontal en $+\infty$



(c) Aplicando el teorema de Darboux (de los valores intermedios):

$$\begin{cases} f(0) = 1,18 \quad , \quad f(90) = \frac{0,94 \cdot 90 + 11,8}{100} = 0,964 \\ VP \text{ es continua en } [0,\ 90] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} VP \text{ toma todos los valores} \\ \text{comprendidos entre } 1,18 \text{ y } 0,964 \end{cases}$$

Por tanto, existirá $\alpha \in (0, 90)$ tal que $VP(\alpha) = 1$, es decir, comprando α kilos de naranjas del tipo B el valor promedio de cada kilo de naranjas es de 1€. Este número de kilos es

$$VP(\alpha) = \frac{0,94\alpha + 11,8}{\alpha + 10} = 1 \iff 0,94\alpha + 11,8 = \alpha + 10 \iff \alpha = \frac{1,8}{0,06} = 30 \text{ kilos}$$

La función VP decrece aproximándose a la asíntota $y = 0,94$ pero nunca la alcanza, de donde se deduce que el valor promedio nunca puede llegar a ser de 0,94€.