CÁLCULO INFINITESIMAL **Curso 2007/2008, Grupo 3**	1^{er} Apellido: ______________	**05/06/2008**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo: **2h** **Calificación:**

SEGUNDO PARCIAL (JUNIO) **SOLUCIONES**

1. (1 punto) *Una partícula sigue la trayectoria $(x, y) = (2t^2 - 1,\ t^2 + t + 1)$, $t \geq 0$, donde x e y se expresan en metros y t en segundos. ¿Cuál es su velocidad en los puntos de corte con la bisectriz del primer cuadrante?*

Solución: Se hallan los puntos de corte con la bisectriz del primer cuadrante:

$$x = y \iff 2t^2 - 1 = t^2 + t + 1 \iff t^2 - t - 2 = 0 \iff \begin{cases} t = 2 \Rightarrow P(7,\ 7) \\ t = -1 \quad (\text{no válida}) \end{cases}$$

La velocidad de la partícula al pasar en el instante $t = 2$ por el punto $(7,\ 7)$ es el módulo del vector velocidad en ese instante:

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(4t)^2 + (2t+1)^2} \implies v(2) = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \simeq 9{,}4\,\text{m/s}$$

2. (1 punto) *Halla la suma de la siguiente serie numérica:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - (-2)^n}{5^n}$

Solución: Esta serie se puede expresar como la diferencia entre dos series geométricas convergentes, y su suma se calcula a través de ellas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - (-2)^n}{5^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = 3\frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{1}{1 - \frac{-2}{5}} = \frac{15}{2} - \frac{5}{7} = \frac{95}{14}$$

3. (1 punto) *Calcula el valor del siguiente límite:* $\displaystyle\lim_n \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

Solución: Se aplica el criterio de Stolz, se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador y, por último, se utilizan órdenes de infinitud:

$$\lim_n \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \overset{\text{St}}{=} \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{n}[n\sqrt{n} + (n-1)\sqrt{n-1}]}{[n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1}][n\sqrt{n} + (n-1)\sqrt{n-1}]} = \lim_n \frac{n^2 + (n-1)\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - (n-1)^3} =$$

$$= \lim_n \frac{n^2 + (n-1)\sqrt{n(n-1)}}{3n^2 - 3n + 1} \overset{\text{Inf}}{=} \lim_n \frac{n^2 + n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$$

4. (1 punto) *Halla el campo de convergencia de la serie geométrica:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$

Solución: Se halla el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_n \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} \implies R = 2 \implies \text{Int. conv.: } (-1-2, -1+2) = (-3,\ 1)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -3 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ (\text{convergente}) \qquad x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Luego el campo de convergencia es el intervalo $[-3,\ 1)$.

5. (1 punto) *Halla la derivada direccional de la función* $f(x,y)=x^2\sqrt{y+1}+y\ln x$ *en el punto (1, 3) en la dirección de la recta* $x+2y-1=0$.

Solución: Se halla el vector gradiente en el punto (1, 3):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sqrt{y+1}+\frac{y}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{y+1}}+\ln x \end{cases} \implies \nabla f = \left(2x\sqrt{y+1}+\frac{y}{x},\ \frac{x^2}{2\sqrt{y+1}}+\ln x\right) \implies \nabla f(1,3)=\left(7,\frac{1}{4}\right)$$

El vector de dirección de la recta $x+2y-1=0$ es $\mathbf{u}=(2,-1)$ y, por tanto, la derivada direccional es:

$$D_{\mathbf{u}}f(1,3)=\frac{\nabla f(1,3)\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}=\frac{\left(7,\ \frac{1}{4}\right)\cdot(2,-1)}{\sqrt{5}}=\frac{14-\frac{1}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{55}{4\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{4}$$

6. (1 punto) *Halla la ecuación implícita del plano tangente a la superficie* $z=x^2+xy+y^3$ *en el punto* $(3,-2,-5)$.

Solución: El vector perpendicular a la superficie es el gradiente de $f(x,y,z)=x^2+xy+y^3-z$. Por tanto, el plano tangente a la superficie es:

$$\nabla f=\left(2x+y,\ x+3y^2,\ -1\right) \implies \nabla f(3,-2,-5)=(4,15,-1) \implies 4(x-3)+15(y+2)-(z+5)=0$$

7. (2 puntos) *Los beneficios que obtiene cierta bodega en la venta de x botellas del vino X e y botellas del vino Y son:* $B(x,y)=2x+3y+\sqrt{xy}$ *euros.*
(a) *Determina los beneficios obtenidos por la bodega en la venta de* 400 ± 2 *botellas del vino X y* 100 ± 1 *botellas del vino Y, estimando el error que se puede cometer en el cálculo.*
(b) *Después de haber vendido* 400 *botellas del vino X y* 100 *botellas del vino Y, ¿qué estrategia de ventas proporciona un mayor beneficio a la bodega?*

Solución: (a) Estimando que se han vendido 400 botellas del vino X y 100 botellas del vino Y, los beneficios obtenidos por la bodega son:

$$B(400,100)=800+300+\sqrt{40.000}=1.300\,\text{euros}$$

Para estimar el error cometido se recurre a la diferencial en el punto:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x}=2+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \\ \frac{\partial B}{\partial y}=3+\frac{x}{2\sqrt{xy}}=3+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x}(400,100)=\frac{9}{4} \\ \frac{\partial B}{\partial y}(400,100)=4 \end{cases} \implies \Delta B\simeq\frac{9}{4}\Delta x+4\Delta y$$

Puesto que el error cometido al estimar x es $|\Delta x|\le 2$ y al estimar y es $|\Delta y|\le 1$, el error (absoluto) cometido al estimar los beneficios obtenidos es:

$$\text{error}\ =\ |\Delta B|\le\frac{9}{4}\,|\Delta x|+4\,|\Delta y|\le\frac{18}{4}+4=\frac{17}{2}=8,5\,\text{euros}$$

(b) La dirección de máximo crecimiento de los beneficios viene dada por el gradiente de la función:

$$\nabla B(400,100)=\left(\frac{9}{4},\ 4\right)\parallel(9,\ 16)$$

Por tanto, la estrategia de ventas que proporciona máximos beneficios a la empresa es vender los vinos X e Y en proporción 9 a 16, es decir, 9 botellas del vino X por cada 16 botellas del vino Y.

8. (2 puntos) *Una empresa de ordenadores puede fabricar cierto modelo en tres países distintos, siendo*

$$C(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 1000x + 600y + 100z \quad \text{euros}$$

el costo de fabricar x, y, z unidades en los países X, Y, Z, respectivamente. Si la empresa recibe un pedido de 1000 ordenadores, ¿cuántos debe fabricar en cada país para minimizar el costo?

Solución: Se trata de hallar el mínimo absoluto de $C(x, y, z)$ condicionado a que $x + y + z = 1000$, para lo que se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange a la función:

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 1000x + 600y + 100z + \lambda(x + y + z - 1000)$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x} = 2x + 1000 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} = 6y + 600 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial z} = 10z + 100 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 1000 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} - 500 \\ y = -\frac{\lambda}{6} - 100 \\ z = -\frac{\lambda}{10} - 10 \\ x + y + z = 1000 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 550 \\ y = 250 \\ z = 200 \\ \lambda = -2.100 \end{cases}$$

Se obtiene un único punto en el que la función toma el mínimo absoluto, ya que no existe el máximo absoluto al no estar acotada superiormente. Por tanto, la empresa debe fabricar 550 ordenadores en el país X, 250 en el Y, y 200 en el Z.