

CÁLCULO INFINITESIMAL Curso 2006/2007, Grupo 13M	1 ^{er} Apellido: _____	26/04/2007	
	2 ^o Apellido: _____	Tiempo: 1h 45m	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	Calificación: 	
	Número de matrícula: 		

Puntuación: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3.

1. Halla el valor del siguiente límite: $\lim_n \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{2+2^2} + \sqrt{3+3^2} + \dots + \sqrt{n+n^2}}{n^2}$.

Solución: Se aplica el criterio de Stolz y la jerarquía de infinitos:

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{2+2^2} + \sqrt{3+3^2} + \dots + \sqrt{n+n^2}}{n^2} &\stackrel{St}{=} \lim_n \frac{\sqrt{n+n^2}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_n \frac{\sqrt{n+n^2}}{2n-1} = \\ &\stackrel{inf}{=} \lim_n \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Determina el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)^n$

Solución: La serie es convergente, como se deduce al aplicar el criterio de la raíz:

$$\begin{aligned} \lim_n \sqrt[n]{a_n} &= \lim_n (\sqrt{n^2+n+1} - n) = \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - n)(\sqrt{n^2+n+1} + n)}{\sqrt{n^2+n+1} + n} = \\ &= \lim_n \frac{(n^2+n+1) - n^2}{\sqrt{n^2+n+1} + n} = \lim_n \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + n} = \\ &\stackrel{inf}{=} \lim_n \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

3. Halla el límite puntual de la siguiente sucesión de funciones: $f_n(x) = n \sin \frac{x}{1+nx}$, $n \geq 1$.

Solución:

$$\begin{cases} x \neq 0 \implies \lim_n n \sin \frac{x}{1+nx} \stackrel{I}{=} \lim_n n \cdot \frac{x}{1+nx} = \lim_n \frac{nx}{1+nx} = \frac{x}{x} = 1 \\ x = 0 \implies f_n(0) = 0 \xrightarrow{n} 0 \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión de funciones converge puntualmente a la función:

$$\lim_n f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

4. Halla el campo de convergencia de la siguiente serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n3^n}$

Solución: Se aplica el criterio de la raíz para hallar el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \lim_n \frac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \implies R = 3 \implies \text{Int. Conv.: } (-1-3, -1+3) = (-4, 2)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -4 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ (conv.)} \quad x = 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Puesto que la primera serie es convergente y la segunda divergente, el campo de convergencia de la serie de potencias es el intervalo $[-4, 2)$.

5. Halla el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen, y su campo de convergencia, de la función:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Solución: Se obtiene, a partir de la serie geométrica, mediante derivación y producto por x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1 \\ f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} &= x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \text{si } |x| < 1 \end{aligned}$$

En los extremos del intervalo de convergencia se obtienen series divergentes ($\sum (\pm 1)^n n$), por lo que el campo de convergencia es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Problema 1. Se construye una columna infinita de cilindros apilados (cada uno encima del anterior) donde el que ocupa el lugar n ésimo tiene radio de base $r_n = \frac{10}{\sqrt{n}}$ y altura $h_n = \frac{10n}{2^n}$, $n \geq 1$, ambas expresadas en metros.

- (a) ¿Cuál es la altura total de la columna?
 (b) ¿Cuál es el volumen total de la columna?

Solución:

(a) Para obtener la altura total de la columna se suman las alturas de todos los cilindros:

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n}{2^n} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

La serie obtenida es aritmético-geométrica, que es una serie convergente cuya suma es:

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &\implies S - \frac{1}{2}S = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots \right) \implies \\ &\implies \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1 \implies S = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la altura total de la columna es: $h = 10 \cdot 2 = 20$ metros.

(b) El volumen total de la columna se obtiene como suma de los volúmenes de todos los cilindros:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 h_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n} \cdot \frac{10n}{2^n} = 1000\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1000\pi \cdot \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1000\pi \simeq 3141,6 \text{ m}^3$$

Problema 2. Desde el origen de coordenadas se lanzan simultáneamente un proyectil y un rayo laser, cuya su posición a los $t \geq 0$ segundos del lanzamiento es:

$$\text{proyectil: } \begin{cases} x = 60t \\ y = 80t - 5t^2 \end{cases} \quad \text{rayo laser: } \begin{cases} x = 200t \\ y = 100t \end{cases}$$

ambas expresadas en metros.

- (a) Ayúdate de la expresión cartesiana para describir, y representar gráficamente, ambas trayectorias. ¿Cuál es la velocidad inicial del proyectil y del rayo?
- (b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuál es el lugar del impacto con el horizonte ($y = 0$) y en qué instante se produce?
- (c) Encuentra, si existen, los puntos de corte entre las trayectorias del proyectil y del rayo. ¿Cuál es la velocidad de cada uno de ellos en ese instante?
- (d) ¿Alcanzará el rayo al proyectil en el punto donde se cruzan sus trayectorias? En caso negativo, ¿en qué instante habría que lanzar el rayo para que alcanzara al proyectil en dicho punto?

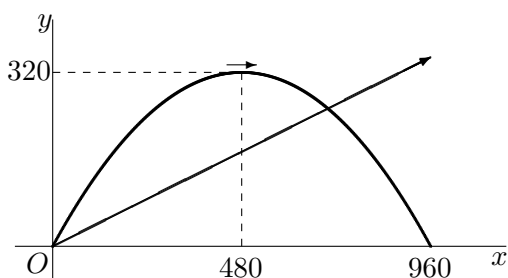
Solución:

(a) Se hallan las ecuaciones cartesianas de cada una de las trayectorias:

$$\begin{cases} x = 60t \\ y = 80t - 5t^2 \end{cases} \implies y = 80 \cdot \frac{x}{60} - 5 \cdot \frac{x^2}{3600} = \frac{-5}{3600}x(x - 960) \quad (\text{parábola})$$

$$\begin{cases} x = 200t \\ y = 100t \end{cases} \implies \frac{x}{200} = \frac{y}{100} \implies y = \frac{x}{2} \quad (\text{recta})$$

La parábola tiene curvatura hacia abajo, corta al eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 960$. La abscisa del vértice es el punto medio entre los de corte con el eje, $x = \frac{0+960}{2} = 480$, y la ordenada será la correspondiente a dicha abscisa: $y = \frac{-5}{3600}480(480 - 960) = 320$. La representación gráfica de ambas trayectorias se puede ver en la figura:



Ambas trayectorias se inician en el origen en $t = 0$.

Para hallar la velocidad se calculan las derivadas de las trayectorias:

$$\text{P: } \begin{cases} x = 60t \\ y = 80t - 5t^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 60 \\ y' = 80 - 10t \end{cases} \implies \begin{cases} x'(0) = 60 \\ y'(0) = 80 \end{cases}$$

$$\text{R: } \begin{cases} x = 200t \\ y = 100t \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 200 \\ y' = 100 \end{cases}$$

La velocidad del proyectil es variable (depende de t) mientras que la del rayo es constante. La velocidad inicial de cada uno de ellos es:

$$\text{proyectil: } v = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ m/s} \quad \text{rayo: } v = \sqrt{200^2 + 100^2} = 100\sqrt{5} \simeq 223,6 \text{ m/s}$$

(b) La altura máxima que alcanza el proyectil es 320 metros (ordenada del vértice), y el lugar del impacto con el horizonte se produce a 960 metros del lugar de lanzamiento, y a los 16 segundos del mismo:

$$y = 80t - 5t^2 = 5t(16 - t) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \text{ seg.} & (\text{lanzamiento}) \\ t = 16 \text{ seg.} & (\text{impacto}) \end{cases}$$

(c) Se igualan las coordenadas de las dos trayectorias, con distinto parámetro (t para el proyectil y s para el rayo), y se resuelve el sistema obtenido:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 60t = 200s \\ y = 80t - 5t^2 = 100s \end{cases} &\iff s = \frac{60t}{200} = \frac{80t - 5t^2}{100} \iff \begin{cases} s = \frac{3t}{10} \\ 30t = 80t - 5t^2 \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{3t}{10} \\ 5t(t - 10) = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} s = \frac{3t}{10} \\ t = 0 \text{ o } t = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} t = s = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ t = 10 \text{ y } s = 3 \Rightarrow (600, 300) \end{cases} \end{aligned}$$

Las trayectorias del proyectil y del rayo se cruzan, aparte del origen de donde parten las dos, en el punto $(600, 300)$, punto por el que pasan a los $t = 10$ y $t = 3$ segundos de la partida, respectivamente. La velocidad del proyectil en ese instante es:

$$v = \sqrt{x'(10)^2 + y'(10)^2} = \sqrt{60^2 + (-20)^2} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \simeq 63,25 \text{ m/s}$$

y la del rayo $v = 100\sqrt{5} \simeq 223,6 \text{ m/s}$, ya que es constante.

(d) El rayo no alcanzará al proyectil, ya que pasan por el punto en distintos momentos, el proyectil a los 10 segundos y el rayo a los 3 segundos de la partida. Si se quiere alcanzar el proyectil con el rayo laser, este se debería lanzar 7 segundos después del lanzamiento del proyectil.