

<b>CÁLCULO INFINITESIMAL</b> <b>Curso 2006/2007, Grupo 13M</b>	1 <sup>er</sup> Apellido: _____	<b>25/06/2007</b>
	2 <sup>o</sup> Apellido: _____	Tiempo: <b>2h 30m</b>
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	<b>Calificación:</b> <input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>
	Número de matrícula: <input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/> <input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	

**SEGUNDO PARCIAL DE JUNIO**

**Puntuación:** 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2

**SOLUCIONES**

**1. (2 puntos)** Una partícula sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^3 - 3t - 14 \end{cases}, t \geq 0$$

donde  $x$  e  $y$  se expresan en metros y  $t$  en segundos.

- (a) Encuentra, si existen, los puntos en que corta a la bisectriz del primer cuadrante.  
 (b) Halla la velocidad con que pasa por los puntos obtenidos en el apartado anterior, así como la ecuación de la correspondiente recta tangente.  
 (c) Encuentra los puntos de tangencia horizontal y vertical.

**Solución:**

(a) Los puntos de la bisectriz del primer cuadrante tienen la misma abscisa y ordenada:

$$y = x \iff t^3 - 3t - 14 = t + 1 \iff t^3 - 4t - 15 = (t - 3)(t^2 + 3t + 5) = 0 \iff t = 3$$

En el instante  $t = 3$  la partícula se encuentra en el punto  $(4, 4)$ , que es el único punto de su trayectoria en que corta a la bisectriz del primer cuadrante.

(b) Llamando  $\alpha(t) = (t + 1, t^3 - 3t - 14)$  al vector de posición de la partícula en cada instante, el vector velocidad o tangente en el instante  $t = 3$  es:

$$\alpha'(t) = (1, 3t^2 - 3) \implies \alpha'(3) = (1, 24)$$

La velocidad y la recta tangente a la trayectoria en el instante  $t = 3$  son:

$$\text{Velocidad: } \|\alpha'(3)\| = \sqrt{1 + 24^2} = \sqrt{577} \simeq 24,02 \text{ m/s} \qquad \text{Recta tangente: } \frac{x - 4}{1} = \frac{y - 4}{24}$$

(c) Puesto que  $x'(t) = 1 \neq 0$ , no hay puntos de tangencia vertical, y el único punto de tangencia horizontal es:

$$y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t - 1)(t + 1) = 0 \underset{t \geq 0}{\iff} t = 1 \implies \alpha(1) = (2, -16)$$

**2. (1 punto)** Halla el límite de la sucesión:  $a_n = n \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$

**Solución:** Usando dos veces infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} \lim_n n \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) &= (\infty \cdot 0) \stackrel{I}{=} \lim_n n \ln \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \lim_n n \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) = (\infty \cdot 0) = \\ &\stackrel{I}{=} \frac{1}{2} \lim_n n \left( 1 + \frac{2}{n} - 1 \right) = \frac{1}{2} \lim_n n \cdot \frac{2}{n} = 1 \end{aligned}$$

3. (1 punto) Estudia la convergencia y calcula la suma de la serie:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

**Solución:** La convergencia de la serie se puede obtener del criterio de comparación:

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^2}{n^2-n} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ es convergente} \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} \text{ es convergente}$$

Puesto que  $a_n = \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ , se trata de una serie telescópica cuya suma es:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} &= \lim_N \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \\ &= \lim_N \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \right] = \lim_N \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \end{aligned}$$

4. (1 punto) Halla el campo de convergencia de la serie de potencias:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n3^n}$

**Solución:** Se halla el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \frac{1}{3} \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \implies R = 3 \implies \text{Int. Conv.} = (2-3, 2+3) = (-1, 5)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ convergente} \quad x = 5 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Por tanto, el campo de convergencia es el intervalo semiabierto  $[-1, 5)$ .

5. (1 punto) Calcula el valor de la derivada direccional de la función  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{x}$  en el punto  $(2, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{u} = (1, -1)$ .

**Solución:** El vector gradiente en el punto  $(2, 1)$  es:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \end{cases} \implies \nabla f(x, y) = \left( 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}, 4y \right) \implies \nabla f(2, 1) = \left( 4 - \frac{2}{\sqrt{2}}, 4 \right) = (4 - \sqrt{2}, 4)$$

y la derivada direccional en el punto  $(2, 1)$  en la dirección del vector  $\mathbf{u} = (1, -1)$  es:

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (4 - \sqrt{2}, 4) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = -1$$

6. (2 puntos) Una empresa fabrica dos tipos de estufas, X e Y, siendo el coste de fabricar x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y:

$$C(x, y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050 \text{ euros}$$

(a) Si cada estufa de tipo X se vende a 285€ y cada estufa de tipo Y se vende a 390€, ¿cuál es la función  $B(x, y)$  que da los beneficios obtenidos con la fabricación y venta de x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y?

(b) Halla las derivadas parciales de la función  $B(x, y)$  cuando  $x = 80$  e  $y = 20$ , e interpreta los valores obtenidos.

(c) Cuando se llevan fabricadas 80 estufas de tipo X y 20 estufas de tipo Y, ¿cuál debe ser la estrategia de fabricación que obtiene máximo beneficio?

**Solución:**

(a) Los beneficios obtenidos, por la fabricación y venta de  $x$  estufas del tipo X e  $y$  estufas del tipo Y, son los ingresos por su venta menos los costes de fabricación, es decir:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 285x + 390y - C(x, y) = 285x + 390y - (32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050) = \\ &= 110x + 185y - 32\sqrt{xy} - 1050 \end{aligned}$$

(b) Las derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x} = 110 - 32\frac{y}{2\sqrt{xy}} = 110 - 16\sqrt{\frac{y}{x}} \\ \frac{\partial B}{\partial y} = 185 - 32\frac{x}{2\sqrt{xy}} = 185 - 16\sqrt{\frac{x}{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x}(80, 20) = 110 - 16\sqrt{\frac{20}{80}} = 102 \\ \frac{\partial B}{\partial y} = 185 - 16\sqrt{\frac{80}{20}} = 153 \end{cases}$$

Cuando se llevan fabricadas y vendidas 80 estufas del tipo X y 20 estufas del tipo Y, los beneficios que se obtendrían por la fabricación y venta de la siguiente estufa de tipo X son 102 €, y por la siguiente estufa de tipo Y son 153 €.

(c) La línea que obtiene máximo beneficio es la indicada por el vector gradiente:

$$\nabla B(80, 20) = (102, 153) = 51(2, 3)$$

es decir, la estrategia de fabricación que permite obtener máximo beneficio es fabricar 2 estufas de tipo X por cada 3 estufas de tipo Y.

7. (2 puntos) Una placa metálica tiene forma circular de ecuación  $x^2 + y^2 \leq 10$ , siendo su temperatura (grados centígrados) en cada punto:  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$ . Encuentra los puntos de la placa donde se producen las temperaturas extremas (máxima y mínima) y su valor.

**Solución:** Hay que comparar los extremos relativos del interior de la placa con los extremos absolutos en la frontera.

Para estudiar los extremos relativos de la función  $T(x, y)$  en  $x^2 + y^2 < 10$  se recurre a los puntos críticos y su clasificación mediante el hessiano:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y \end{cases} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies \text{Punto crítico: } (1, 0)$$

$$\begin{aligned} H_T(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies |H_T(1, 0)| = 8 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1, 0) = 2 > 0 \implies \\ &\implies \text{Mínimo relativo en } (1, 0) \text{ que vale } T(1, 0) = 2 \end{aligned}$$

Para hallar los extremos absolutos de la función  $T(x, y)$  en  $x^2 + y^2 = 10$  se recurre al cálculo de extremos condicionados mediante multiplicadores de Lagrange:

$$F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

$$\begin{cases} \nabla F(x, y) = \mathbf{0} \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + \lambda)x = 1 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff y = 0 \text{ ó } \lambda = -2$$

$$\begin{cases} y = 0 \implies x^2 + 0 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10} \\ \lambda = -2 \implies \begin{cases} (1 - 2)x = 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ 1 + y^2 = 10 \implies y = \pm 3 \end{cases} \implies (\pm\sqrt{10}, 0), (-1, \pm 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(\sqrt{10}, 0) = 13 - 2\sqrt{10} \simeq 6,7 & T(-1, 3) = 24 \\ T(-\sqrt{10}, 0) = 13 + 2\sqrt{10} \simeq 19,3 & T(-1, -3) = 24 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \text{m\u00e1ximo absoluto en } (-1, \pm 3) \text{ que vale } T(-1, \pm 3) = 24 \\ \text{m\u00ednimo absoluto en } (\sqrt{10}, 0) \text{ que vale } T(\sqrt{10}, 0) \simeq 6,7 \end{cases}$$

Comparando la temperatura en los puntos cr\u00edticos del interior de la placa con sus valores extremos en la frontera, se tiene que la m\u00e1xima temperatura es de  $24^{\circ}\text{C}$  en los puntos  $(-1, \pm 3)$  de la frontera, y la m\u00ednima temperatura es de  $2^{\circ}\text{C}$  en el punto  $(1, 0)$  del interior.