

CÁLCULO INFINITESIMAL Curso 2006/2007, Grupo 13M	1 ^{er} Apellido: _____	25/06/2007	
	2 ^o Apellido: _____	Tiempo: 2h	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	Calificación: 	
	Número de matrícula: 		

SEGUNDO PARCIAL DE JUNIO (2ª parte)

Puntuación: 1,5 + 1,5 + 2 + 2,5 + 2,5

SOLUCIONES

- 1. (1,5 puntos)** Halla la ecuación general del plano tangente a la superficie $x^2 + y \ln x + z^2(y - 2x) = 5$ en el punto $(1, 3, -2)$.

Solución: El vector normal a la superficie y, por tanto, al plano tangente es el gradiente de la función asociada a la superficie en el punto. Las derivadas parciales son:

$$F(x, y, z) = x^2 + y \ln x + z^2(y - 2x) - 5 = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{y}{x} - 2z^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + z^2 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z(y - 2x) \end{cases}$$

Por tanto, el vector normal al plano es:

$$\mathbf{n} = \nabla F(1, 3, -2) = \left(2x + \frac{y}{x} - 2z^2, \ln x + z^2, 2z(y - 2x) \right) \Big|_{(1, 3, -2)} = (-3, 4, -4)$$

y la ecuación del plano tangente es $-3(x - 1) + 4(y - 3) - 4(z + 2) = 0$, es decir: $3x - 4y + 4z + 17 = 0$.

- 2. (1,5 puntos)** Calcula el valor de la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{x}$ en el punto $(2, 1)$ en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1)$.

Solución: El vector gradiente en el punto $(2, 1)$ es:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \end{cases} \implies \nabla f(x, y) = \left(2x - \frac{2}{\sqrt{x}}, 4y \right) \implies \nabla f(2, 1) = \left(4 - \frac{2}{\sqrt{2}}, 4 \right) = (4 - \sqrt{2}, 4)$$

y la derivada direccional en el punto $(2, 1)$ en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1)$ es:

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (4 - \sqrt{2}, 4) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = -1$$

- 3. (2 puntos)** Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 15y$.

Solución: Se hallan las derivadas parciales primeras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy = 3x(x - 2y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 15y^2 - 15 = -3(x^2 - 5y^2 + 5)$$

y se calculan los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x(x - 2y) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 2y \\ x^2 - 5y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \implies 0 - 5y^2 + 5 = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1 \\ x = 2y \implies 4y^2 - 5y^2 + 5 = 0 \implies y^2 = 5 \implies y = \pm\sqrt{5} \end{cases} \implies \begin{cases} (0, 1), (0, -1) \\ (2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \end{cases}$$

Para clasificar los puntos críticos, se calculan las derivadas parciales segundas y la matriz hessiana:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6y = 6(x - y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 30y \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x \qquad \implies \qquad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x - y) & -6x \\ -6x & 30y \end{pmatrix}$$

Entonces:

- $|H_f(0, 1)| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} = -180 < 0 \implies$ Punto de silla en $(0, 1)$
- $|H_f(0, -1)| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} = -180 < 0 \implies$ Punto de silla en $(0, -1)$
- $|H_f(2\sqrt{5}, \sqrt{5})| = \begin{vmatrix} 6\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ -12\sqrt{5} & 30\sqrt{5} \end{vmatrix} = 180 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 6\sqrt{5} > 0 \implies$
 \implies Mínimo relativo en $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$
- $|H_f(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})| = \begin{vmatrix} -6\sqrt{5} & 12\sqrt{5} \\ 12\sqrt{5} & -30\sqrt{5} \end{vmatrix} = 180 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = -6\sqrt{5} < 0 \implies$
 \implies Máximo relativo en $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

4. (2,5 puntos) Una empresa fabrica dos tipos de estufas, X e Y, siendo el coste de fabricar x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y:

$$C(x, y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050 \text{ euros}$$

(a) Si cada estufa de tipo X se vende a 285€ y cada estufa de tipo Y se vende a 390€, ¿cuál es la función $B(x, y)$ que da los beneficios obtenidos con la fabricación y venta de x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y?

(b) Halla las derivadas parciales de la función $B(x, y)$ cuando $x = 80$ e $y = 20$, e interpreta los valores obtenidos.

(c) Cuando se llevan fabricadas 80 estufas de tipo X y 20 estufas de tipo Y, ¿cuál debe ser la estrategia de fabricación que obtiene máximo beneficio?

Solución:

(a) Los beneficios obtenidos, por la fabricación y venta de x estufas del tipo X e y estufas del tipo Y, son los ingresos por su venta menos los costes de fabricación, es decir:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 285x + 390y - C(x, y) = 285x + 390y - (32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050) = \\ &= 110x + 185y - 32\sqrt{xy} - 1050 \end{aligned}$$

(b) Las derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x} = 110 - 32\frac{y}{2\sqrt{xy}} = 110 - 16\sqrt{\frac{y}{x}} \\ \frac{\partial B}{\partial y} = 185 - 32\frac{x}{2\sqrt{xy}} = 185 - 16\sqrt{\frac{x}{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x}(80, 20) = 110 - 16\sqrt{\frac{20}{80}} = 102 \\ \frac{\partial B}{\partial y} = 185 - 16\sqrt{\frac{80}{20}} = 153 \end{cases}$$

Cuando se llevan fabricadas y vendidas 80 estufas del tipo X y 20 estufas del tipo Y, los beneficios que se obtendrían por la fabricación y venta de la siguiente estufa de tipo X son 102€, y por la siguiente estufa de tipo Y son 153€.

(c) La línea que obtiene máximo beneficio es la indicada por el vector gradiente:

$$\nabla B(80, 20) = (102, 153) = 51(2, 3)$$

es decir, la estrategia de fabricación que permite obtener máximo beneficio es fabricar 2 estufas de tipo X por cada 3 estufas de tipo Y.

5. (2,5 puntos) Una placa metálica tiene forma circular de ecuación $x^2 + y^2 \leq 10$, siendo su temperatura (grados centígrados) en cada punto: $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$. Encuentra los puntos de la placa donde se producen las temperaturas extremas (máxima y mínima) y su valor.

Solución: Hay que comparar los extremos relativos del interior de la placa con los extremos absolutos en la frontera.

Para estudiar los extremos relativos de la función $T(x, y)$ en $x^2 + y^2 < 10$ se recurre a los puntos críticos y su clasificación mediante el hessiano:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y \end{cases} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies \text{Punto crítico: } (1, 0)$$

$$H_T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies |H_T(1, 0)| = 8 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1, 0) = 2 > 0 \implies \\ \implies \text{Mínimo relativo en } (1, 0) \text{ que vale } T(1, 0) = 2$$

Para hallar los extremos absolutos de la función $T(x, y)$ en $x^2 + y^2 = 10$ se recurre al cálculo de extremos condicionados mediante multiplicadores de Lagrange:

$$F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

$$\begin{cases} \nabla F(x, y) = \mathbf{0} \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + \lambda)x = 1 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff y = 0 \text{ ó } \lambda = -2$$

$$\begin{cases} y = 0 \implies x^2 + 0 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10} \\ \lambda = -2 \implies \begin{cases} (1 - 2)x = 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ 1 + y^2 = 10 \implies y = \pm 3 \end{cases} \implies (\pm\sqrt{10}, 0), (-1, \pm 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(\sqrt{10}, 0) = 13 - 2\sqrt{10} \simeq 6,7 & T(-1, 3) = 24 \\ T(-\sqrt{10}, 0) = 13 + 2\sqrt{10} \simeq 19,3 & T(-1, -3) = 24 \end{cases} \implies \\ \implies \begin{cases} \text{máximo absoluto en } (-1, \pm 3) \text{ que vale } T(-1, \pm 3) = 24 \\ \text{mínimo absoluto en } (\sqrt{10}, 0) \text{ que vale } T(\sqrt{10}, 0) \simeq 6,7 \end{cases}$$

Comparando la temperatura en los puntos críticos del interior de la placa con sus valores extremos en la frontera, se tiene que la máxima temperatura es de 24°C en los puntos $(-1, \pm 3)$ de la frontera, y la mínima temperatura es de 2°C en el punto $(1, 0)$ del interior.