CÁLCULO INFINITESIMAL **Curso 2006/2007, Grupo 13M**	1^{er} Apellido: ______	**16/02/2007**
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	Tiempo: **1h 45m** **Calificación:**

PRIMER PARCIAL DE FEBRERO **SOLUCIONES**

1. Halla, en coordenadas cartesianas, el lugar geométrico de todos los números complejos de la forma $z = \dfrac{a+i}{1-i}$, $a \in \mathbb{R}$. Encuentra, si existen los que se encuentran sobre la recta $x + y = 3$.

Solución: Se hallan las partes real e imaginaria de z y, entre ellas, se elimina el parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$z = \frac{a+i}{1-i} = \frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(a-1)+(a+1)i}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{a+1}{2}i$$

$$\begin{cases} x = \frac{a-1}{2} \\ y = \frac{a+1}{2} \end{cases} \implies a = 2x+1 = 2y-1 \implies x - y + 1 = 0$$

El lugar geométrico es la recta $x - y + 1 = 0$. Para hallar los puntos que se encuentran sobre la otra recta, se halla la intersección entre ambas:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \implies z = 1 + 2i$$

2. Halla, sin usar la regla de L'Hôpital, los siguientes límites: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x}{\ln x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{I}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\frac{1}{3}\ln x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x}{\ln x} = \left(\frac{\text{acotado}}{\infty}\right) = 0$$

3. Estudia el crecimiento y los extremos relativos y absolutos de $F(x) = \int_0^x t\sqrt[3]{t-1}\,dt$, $0 \le x \le 9$.

Solución:

$$F'(x) = x\sqrt[3]{x-1} \begin{cases} < 0 & \text{, si } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{, si } x = 0 \text{ o } x = 1 \\ > 0 & \text{, si } 1 < x \le 9 \end{cases} \implies \begin{cases} F \text{ es decreciente en } [0,\ 1) \\ F \text{ tiene mínimo relativo y absoluto en } x = 1 \\ F \text{ es creciente en } (1,\ 9] \end{cases}$$

La función no presenta máximos relativos, y el máximo absoluto lo alcanza en uno de los extremos del dominio. Es fácil ver que $F(0) = 0$, y para hallar $F(9)$ se calcula la integral indefinida:

$$\int t\sqrt[3]{t-1}\,dt = \left(\begin{array}{c} t-1 = x^3 \\ dt = 3x^2dx \end{array}\right) = \int (x^3+1)x3x^2dx = \int 3(x^6+x^3)dx = 3\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4}\right) + c =$$
$$= 3\left(\frac{(t-1)^{7/3}}{7} + \frac{(t-1)^{4/3}}{4}\right) + c$$

$$F(9) = \int_0^9 t\sqrt[3]{t-1}\,dt = 3\left[\frac{(t-1)^{7/3}}{7} + \frac{(t-1)^{4/3}}{4}\right]_{t=0}^{t=9} = 3\left(\frac{129}{7} + \frac{17}{4}\right) > 0$$

Por tanto, el máximo absoluto lo alcanza en $x = 9$.

4. Calcula el valor de la siguiente integral definida: $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Solución: En primer lugar, se calcula la integral indefinida por cambio de variable:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left(\begin{array}{c} 1+x=z^2 \\ dx = 2z\,dz \end{array} \right) = \int \frac{z^2-1}{z} 2z\,dz = 2\int (z^2-1)\,dz = 2\left(\frac{z^3}{3} - z\right) + c =$$
$$= \frac{2}{3} z(z^2-3) + c = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(1+x-3) + c = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x} + c$$

o integrando por partes:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left(\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = (1+x)^{-1/2}dx \Rightarrow v = 2(1+x)^{1/2} \end{array} \right) = 2x(1+x)^{1/2} - \int 2(1+x)^{1/2}\,dx =$$
$$= 2x\sqrt{1+x} - \frac{4}{3}(1+x)^{3/2} + c = \left(2x - \frac{4(1+x)}{3}\right)\sqrt{1+x} + c = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x} + c$$

Entonces:

$$I = \int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}\left[(x-2)\sqrt{1+x}\right]_{x=3}^{x=8} = \frac{2}{3}(18-2) = \frac{32}{3}$$

5. Calcula el valor de la siguiente integral impropia: $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

Solución: En primer lugar, se calcula la integral indefinida por partes:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \left(\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = \frac{-1}{2x^2} \end{array} \right) = \ln x \frac{-1}{2x^2} - \int \frac{-1}{2x^2}\frac{dx}{x} = \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\,dx =$$
$$= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c = -\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + c$$

y entonces:

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{2\ln x + 1}{4x^2}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{2\ln R + 1}{4R^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

ya que el límite es cero (aplicando L'Hôpital o por ordenes de infinitud).

6. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $y = \sin^3 x$ y el eje de abscisas, entre $x=0$ y $x=\pi$.

Solución:

$$\text{Área} = \int_0^\pi \sin^3 x\,dx = \int_0^\pi \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = \int_0^\pi \left(\sin x - \cos^2 x \sin x\right)\,dx =$$
$$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \left(-(-1) + \frac{-1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Problema 1. El número de piezas de cierta cerámica fabricadas cada día por una empresa de alfarería varían con el tiempo que pasa desde su fundación, y viene dado por la siguiente función (t es el número de meses pasados desde la fundación de la empresa):

$$f(t) = \begin{cases} 25 + t^2(15-2t) & , \text{ si } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{100t-467}{t-5} & , \text{ si } t > 6 \end{cases}$$

(a) Halla los límites de esta función en $t = 0$, $t = 6$ y $t = \infty$.

(b) Calcula la derivada de esta función. ¿Cuándo crece y cuándo disminuye la fabricación de la cerámica? ¿Cuándo es máxima y cuándo es mínima la producción?

(c) Representa gráficamente la función f.

Solución:

(a)

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \big(25 + t^2(15-2t)\big) = 25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to 6^-} f(t) = \lim_{t\to 6^-} \big(25 + t^2(15-2t)\big) = 25 + 36(15-12) = 133 \\ \displaystyle\lim_{t\to 6^+} f(t) = \lim_{t\to 6^+} \frac{100t-467}{t-5} = 133 \end{array} \right. \implies \lim_{t\to 6} f(t) = 133$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{100t-467}{t-5} = 100$$

(b) Se halla la derivada en los intervalos de definición, calculando las laterales en el punto de cambio.

Si $0 \leq t < 6$, entonces: $f'(t) = 30t - 6t^2 = 6t(5-t)$, de donde: $f'(6^-) = -36$

Si $t > 6$, entonces: $f'(t) = \dfrac{-33}{(t-5)^2}$, de donde: $f'(6^+) = -33$

Resumiendo:

$$f'(t) = \begin{cases} 6t(5-t) & , \text{ si } 0 \leq t < 6 \\ \frac{-33}{(t-5)^2} & , \text{ si } t > 6 \end{cases} \qquad \text{y no es derivable en } t = 6.$$

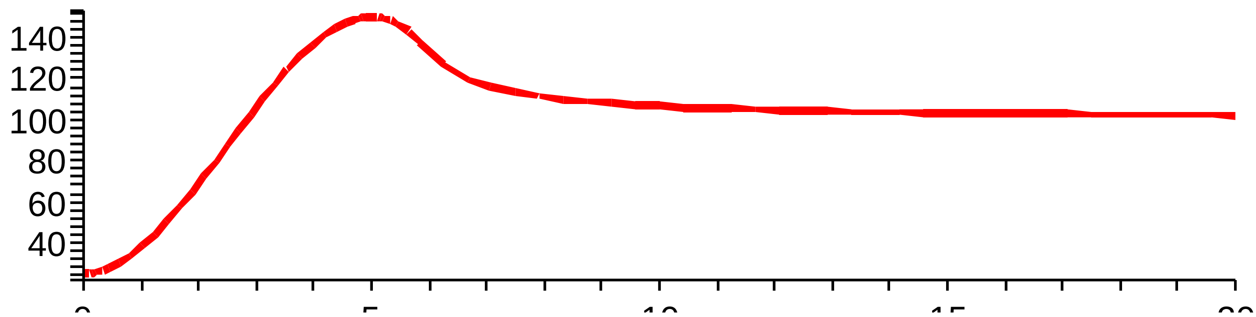
El crecimiento y extremos de las función son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0 < t < 5,\ f'(t) > 0 \text{ y la función es creciente} \\ \text{Si } 5 < t < 6 \text{ o } t > 6,\ f'(t) < 0 \text{ y la función es decreciente} \end{array} \right. \implies \text{máximo relativo y absoluto en } t = 5$$

Puesto que $f(0) = 25$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = 100$, el mínimo absoluto lo alcanza en $t = 0$.

Resumiendo, la producción es mínima al comienzo (25 piezas al día), después crece hasta el quinto año en que alcanza la producción máxima de $f(5) = 150$ piezas al día y, a continuación, decrece continuamente hacia una producción diaria de 100 piezas.

(c)



Problema 2. Un depósito de combustible tiene forma de cilindro acabando con una semiesfera en su parte inferior.

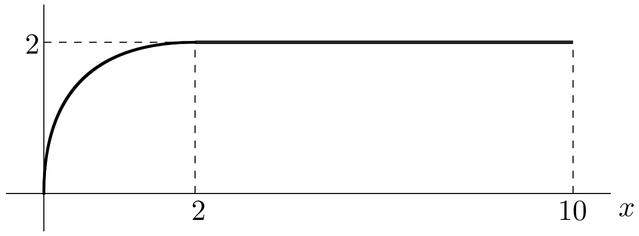
(a) Si el radio y altura del cilindro miden 2 y 8 m, respectivamente, determina el volumen $V(h)$ de combustible en el depósito cuando éste llega a una altura h, $0 \leq h \leq 10$.

(b) ¿Cuál es la capacidad total del depósito?

Solución:

(a) El depósito se puede obtener por revolución de la gráfica de la figura. Usando la ecuación de la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$
$$y = \pm\sqrt{4-(x-2)^2} = \pm\sqrt{4x-x^2}$$



Por tanto, la función cuya gráfica aparece en la figura es:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x-x^2} & , \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & , \text{ si } 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

El volumen $V(h)$ de combustible en el depósito cuando éste llega a una altura h, $0 \leq h \leq 10$, es el volumen de revolución engendrado al girar lar función f alrededor del eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = h$, es decir:

$$0 \leq h \leq 2 \implies V(h) = \pi \int_0^h \left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2 dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=h} = \pi\left(2h^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi}{3}h^2(6-h)$$

$$2 \leq h \leq 10 \implies V(h) = \pi \int_0^h (f(x))^2\, dx = V(2) + \pi \int_2^h 2^2 dx = \frac{16\pi}{3} + 4\pi\, [x]_{x=2}^{x=h} = \frac{16\pi}{3} + 4\pi(h-2)$$

Resumiendo:

$$V(h) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}h^2(6-h) & , \text{ si } 0 \leq h \leq 2 \\ \frac{16\pi}{3} + 4\pi(h-2) & , \text{ si } 2 \leq h \leq 10 \end{cases}$$

(b) La capacidad total del depósito es:

$$V(10) = \frac{16\pi}{3} + 32\pi = \frac{112\pi}{3}\ \text{m}^3 \ \simeq\ 117,3\ \text{m}^3$$