<table>
<tr><td>CÁLCULO INFINITESIMAL
Curso 2006/2007, Grupo 13M</td><td rowspan="2">1^{er} Apellido: ____________
2º Apellido: ____________
Nombre: ____________
Número de matrícula: </td><td>25/06/2007</td></tr>
<tr><td>Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid</td><td>Tiempo: 1h 30m
Calificación:</td></tr>
</table>

EXAMEN FINAL DE JUNIO (Segundo parcial) **Puntuación:** $1+0,5+1+1+1,5$

SOLUCIONES

1. (1 punto) *Una partícula sigue la trayectoria dada por la curva:*

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^3-3t-14 \end{cases}, \ t \geq 0$$

donde x e y se expresan en metros y t en segundos.
(a) *Encuentra, si existen, los puntos en que corta a la bisectriz del primer cuadrante.*
(b) *Halla la velocidad con que pasa por los puntos obtenidos en el apartado anterior, así como la ecuación de la correspondiente recta tangente.*
(c) *Encuentra los puntos de tangencia horizontal y vertical.*

Solución:
(a) Los puntos de la bisectriz del primer cuadrante tienen la misma abscisa y ordenada:

$$y = x \iff t^3-3t-14 = t+1 \iff t^3-4t-15 = (t-3)(t^2+3t+5) = 0 \iff t = 3$$

En el instante $t = 3$ la partícula se encuentra en el punto $(4,4)$, que es el único punto de su trayectoria en que corta a la bisectriz del primer cuadrante.

(b) Llamando $\alpha(t) = (t+1,\, t^3-3t-14)$ al vector de posición de la partícula en cada instante, el vector velocidad o tangente en el instante $t = 3$ es:

$$\alpha'(t) = (1,\, 3t^2-3) \implies \alpha'(3) = (1,\, 24)$$

La velocidad y la recta tangente a la trayectoria en el instante $t = 3$ son:

Velocidad: $\|\alpha'(3)\| = \sqrt{1+24^2} = \sqrt{577} \simeq 24,02$ m/s Recta tangente: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-4}{24}$

(c) Puesto que $x'(t) = 1 \neq 0$, no hay puntos de tangencia vertical, y el único punto de tangencia horizontal es:

$$y'(t) = 3t^2-3 = 3(t-1)(t+1) = 0 \underset{t\geq 0}{\iff} t = 1 \implies \alpha(1) = (2,-16)$$

2. (0,5 puntos) *Halla el límite de la sucesión:* $a_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-1\right)$

Solución: Usando dos veces infinitésimos equivalentes:

$$\lim_n n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) = (\infty\cdot 0) \overset{I}{=} \lim_n n \ln\sqrt{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\lim_n n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = (\infty\cdot 0) =$$

$$\overset{I}{=} \frac{1}{2}\lim_n n\left(1+\frac{2}{n}-1\right) = \frac{1}{2}\lim_n n\cdot\frac{2}{n} = 1$$

3. (1 punto) *Halla el campo de convergencia de la serie de potencias:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n3^n}$

Solución: Se halla el radio y el intervalo de convergencia:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \frac{1}{3} \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \implies R = 3 \implies \text{Int. Conv.} = (2-3, 2+3) = (-1, 5)$$

En los extremos del intervalo de convergencia:

$$x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ \text{convergente} \qquad x = 5 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Por tanto, el campo de convergencia es el intervalo semiabierto $[-1, 5)$.

4. (1 punto) *Calcula el valor de la derivada direccional de la función* $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{x}$ *en el punto* $(2,\, 1)$ *en la dirección del vector* $\mathbf{u} = (1, -1)$.

Solución: El vector gradiente en el punto $(2,\, 1)$ es:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \end{cases} \implies \nabla f(x, y) = \left(2x - \frac{2}{\sqrt{x}},\, 4y\right) \implies \nabla f(2, 1) = \left(4 - \frac{2}{\sqrt{2}},\, 4\right) = (4 - \sqrt{2},\, 4)$$

y la derivada direccional en el punto $(2,\, 1)$ en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1, -1)$ es:

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (4 - \sqrt{2},\, 4) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = -1$$

5. (1,5 puntos) *Una placa metálica tiene forma circular de ecuación* $x^2 + y^2 \leq 10$, *siendo su temperatura (grados centígrados) en cada punto* $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$. *Encuentra los puntos de la placa donde se producen las temperaturas extremas (máxima y mínima) y su valor.*

Solución: Hay que comparar los extremos relativos del interior de la placa con los extremos absolutos en la frontera.

Para estudiar los extremos relativos de la función $T(x, y)$ en $x^2 + y^2 < 10$ se recurre a los puntos críticos y su clasificación mediante el hessiano:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y \end{cases} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies \text{Punto crítico: } (1,\, 0)$$

$$H_T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies |H_T(1, 0)| = 8 > 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1, 0) = 2 > 0 \implies$$

$$\implies \text{Mínimo relativo en } (1, 0) \text{ que vale } T(1, 0) = 2$$

Para hallar los extremos absolutos de la función $T(x, y)$ en $x^2 + y^2 = 10$ se recurre al cálculo de extremos condicionados mediante multiplicadores de Lagrange:

$$F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

$$\begin{cases} \nabla F(x, y) = \mathbf{0} \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + \lambda)x = 1 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \iff y = 0 \text{ ó } \lambda = -2$$

$$\begin{cases} y = 0 \implies x^2 + 0 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10} \\ \lambda = -2 \implies \begin{cases} (1-2)x = 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ 1 + y^2 = 10 \implies y = \pm 3 \end{cases} \end{cases} \implies (\pm\sqrt{10}, 0)\,, \ \ (-1, \pm 3)$$

$$\begin{cases} T(\sqrt{10},0) = 13 - 2\sqrt{10} \simeq 6,7 & T(-1,3) = 24 \\ T(-\sqrt{10},0) = 13 + 2\sqrt{10} \simeq 19,3 & T(-1,-3) = 24 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{máximo absoluto en } (-1,\pm 3) \text{ que vale } T(-1,\pm 3) = 24 \\ \text{mínimo absoluto en } (\sqrt{10},0) \text{ que vale } T(\sqrt{10},0) \simeq 6,7 \end{cases}$$

Comparando la temperatura en los puntos críticos del interior de la placa con sus valores extremos en la frontera, se tiene que la máxima temperatura es de 24ºC en los puntos $(-1,\pm 3)$ de la frontera, y la mínima temperatura es de 2ºC en el punto $(1,0)$ del interior.