

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE (03/09/2005)
EXAMEN FINAL

SOLUCIONES

1. Halla todas las soluciones de la ecuación $z^5 - i = 0$, y calcula su producto expresándolo en forma binómica.

Solución: Se despeja z en la ecuación y se hallan las raíces quintas resultantes:

$$z^5 - i = 0 \iff z = \sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[5]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi+4k\pi}{10}} = e^{i\frac{(1+4k)\pi}{10}}, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Por tanto, todas las soluciones de la ecuación son:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{10}} \quad z_1 = e^{i\frac{5\pi}{10}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = e^{i\frac{9\pi}{10}} \quad z_3 = e^{i\frac{13\pi}{10}} \quad z_4 = e^{i\frac{17\pi}{10}}$$

Teniendo en cuenta que para multiplicar números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos, el producto de las cinco raíces es:

$$z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 = 1^5 e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} + \frac{13\pi}{10} + \frac{17\pi}{10})} = e^{i\frac{45\pi}{10}} = e^{i\frac{9\pi}{2}} = e^{i(4\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

2. Para los distintos valores del parámetro $a > 0$, calcula el límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n}$

Solución:

$$0 < a < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n-1} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$a = 1 \implies a^n = a^{n-1} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n}{1 + 2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$a > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n-1} = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^{n-1}} = a$$

ya que, en este último límite, las exponenciales son infinitos de orden superior a n . En resumen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n} = \begin{cases} 1/2 & , \text{ si } 0 < a \leq 1 \\ a & , \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

3. a) Halla el dominio $D \subset \mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2}$.

b) Estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \in D \\ 1 & , \text{ si } x \notin D \end{cases}$$

Solución:

a) El dominio de la función f es:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0 \text{ y } x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \neq 0\}$$

Puesto que:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) \geq 0 \iff x + 2 \geq 0 \text{ o } x = 1 \iff x \geq -2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \neq 0 \iff x \neq 1 \text{ y } x \neq 2$$

se obtiene que:

$$D = [-2, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

b) Puesto que la función f es continua en el interior de su dominio y la función 1 es siempre continua, la función g es continua en todos los puntos que no son de cambio, es decir, siempre que $x \neq -2, 1, 2$. Se estudia la continuidad en estos puntos:

- En $x = -2$ (que es un punto de D), $g(-2) = f(-2) = 0$ y:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{12} = 0$$

de donde se deduce que presenta una discontinuidad de salto, siendo continua por la derecha.

- En $x = 1$ (que no es un punto de D), $g(1) = 1$ y:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|\sqrt{3}}{-(x-1)} = \begin{cases} \sqrt{3} & , \text{ si } x \rightarrow 1^- \\ -\sqrt{3} & , \text{ si } x \rightarrow 1^+ \end{cases} \end{aligned}$$

de donde se deduce que presenta una discontinuidad de salto.

- En $x = 2$ (que no es un punto de D), $g(2) = 1$ y:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{2}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & , \text{ si } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \end{aligned}$$

de donde se deduce que presenta una discontinuidad esencial.

4. De entre todas las elipses de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, que pasan por el punto $(1, 1)$, encuentra la de área mínima.

Solución: Si la elipse pasa por el punto $(1, 1)$, ha de ser:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \implies \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{1}{a^2} \implies b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1} \implies b = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

con $a > 1$. Usando esta relación, el área de la elipse se puede expresar en función de a :

$$S(a) = \pi ab = \pi a \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi a^2}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1$$

Se trata de hallar el mínimo absoluto de esta función, para lo que se calcula su derivada y sus puntos críticos:

$$S'(a) = \pi \frac{2a\sqrt{a^2 - 1} - a^2 \frac{2a}{2\sqrt{a^2 - 1}}}{a^2 - 1} = \pi \frac{2a(a^2 - 1) - a^3}{(a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi a(a^2 - 2)}{(a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 1}} = 0 \iff a = \sqrt{2}$$

que es la única solución en el intervalo $(1, +\infty)$. El crecimiento de la función y el carácter del punto crítico, se deducen de la derivada:

$$S'(a) = \frac{\pi a(a^2 - 2)}{(a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 1}} \begin{cases} < 0 & , \text{ si } 1 < a < \sqrt{2} \\ > 0 & , \text{ si } a > \sqrt{2} \end{cases} \implies \text{La función es } \begin{cases} \text{decreciente en } (1, \sqrt{2}) \\ \text{creciente en } (\sqrt{2}, +\infty) \end{cases}$$

y, en consecuencia, alcanza un mínimo relativo en $a = \sqrt{2}$, que también es absoluto. Por tanto, la elipse de área mínima es la obtenida para $a = \sqrt{2}$, siendo entonces también $b = \sqrt{2}$, es decir:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$$

que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

5. *Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función:*

$$f(x) = \frac{|\cos x|}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x}$$

Solución: Teniendo en cuenta que $f(x) \geq 0$ cuando $x \in [0, \pi]$, que $|\cos x| = \cos x$ cuando $x \in [0, \pi/2]$, y que $|\cos x| = -\cos x$ cuando $x \in [\pi/2, \pi]$, ya que el coseno es negativo en el segundo cuadrante, el área pedida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \frac{|\cos x|}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{-\cos x}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx - \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos x}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

Para hallar estas integrales definidas, se halla la integral indefinida teniendo en cuenta que el integrando es una función impar en $\cos x$ y que, por tanto, se resuelve mediante el cambio de variable $\sin x = t$. Procediendo así:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{3 + 3 \sin x + \cos^2 x} dx &= \left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{3 + 3t + (1 - t^2)} = \int \frac{-1}{t^2 - 3t - 4} dt = \\ &= \int \frac{-1}{(t + 1)(t - 4)} dt = \int \left(\frac{1/5}{t + 1} - \frac{1/5}{t - 4} \right) dt = \\ &= \frac{1}{5} (\ln |t + 1| - \ln |t - 4|) + c = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 4} \right| + c \end{aligned}$$

Entonces, el área es:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 4} \right| \right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \left[\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 4} \right| \right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = \frac{1}{5} \left(\ln \left| \frac{2}{-3} \right| - \ln \left| \frac{1}{-4} \right| \right) - \\ &- \frac{1}{5} \left(\ln \left| \frac{1}{-4} \right| - \ln \left| \frac{2}{-3} \right| \right) = \frac{1}{5} \left(2 \ln \frac{2}{3} - 2 \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{5} (\ln 2 - \ln 3 + \ln 4) = \frac{2(3 \ln 2 - \ln 3)}{5} \end{aligned}$$

6. *Estudia la convergencia de la siguiente serie y calcula, si es posible, su suma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n + 2n}{5^n}$$

Solución: La serie se puede descomponer en suma de dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n + 2n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{-2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

ambas convergentes, ya que la primera es geométrica de razón $-2/5$ y la segunda aritmético-geométrica de razón $1/5$, por lo que también es convergente la serie dada.

La suma de la primera serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{-2}{5}\right)^n = \frac{3 \cdot \frac{-2}{5}}{1 - \frac{-2}{5}} = \frac{-6}{7}$$

Para sumar la segunda serie se procede así:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n \implies S - \frac{1}{5}S = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

y cambiando el índice de la segunda serie y operando:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}S &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{k=2}^{\infty} 2(k-1) \left(\frac{1}{5}\right)^k = \\ &= \frac{2}{5} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{k=2}^{\infty} 2k \left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{2}{5} + \frac{\frac{2}{25}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \implies S = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

La suma suma de la serie pedida se obtiene sumando las sumas de las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n + 2n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{-2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-6}{7} + \frac{5}{8} = \frac{-13}{56}$$

7. Se considera la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + \sin^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Calcula los límites de f en $(0, 0)$ según las rectas $y = mx$. ¿Es f continua en $(0, 0)$?
- Estudia la diferenciabilidad de f en el punto $(0, \frac{\pi}{2})$.
- Calcula la derivada direccional de f en $(0, \frac{\pi}{2})$ según la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 1)$.

Solución:

a) Los límites de f en $(0, 0)$ según las rectas $y = mx$ son:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); y=mx} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin^2 mx}{x^2 + m^2 x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2m \sin mx \cos mx}{(1 + m^2)2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 2m^2 \cos^2 mx - 2m^2 \sin^2 mx}{2(1 + m^2)} = \frac{m^2}{1 + m^2} \end{aligned}$$

Como dependen de m , no existe el límite de f en $(0, 0)$ y, por tanto, f no es continua en $(0, 0)$.

b) En cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$ las derivadas parciales de f son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 + \sin^2 y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2x \sin^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2 \sin y \cos y (x^2 + y^2) - (x^3 + \sin^2 y)2y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

y, puesto que son continuas en $(0, \frac{\pi}{2})$, f es diferenciable en dicho punto.

c) Las derivadas parciales y el gradiente de f en $(0, \frac{\pi}{2})$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-16}{\pi^3} \implies \nabla f \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{-16}{\pi^3}\right)$$

y entonces, la derivada direccional en $(0, \frac{\pi}{2})$ con la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 1)$ es:

$$D_{\vec{v}} f \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \nabla f \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(0, \frac{-16}{\pi^3}\right) \cdot \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-16}{\pi^3 \sqrt{2}} = \frac{-8\sqrt{2}}{\pi^3}$$

8. Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y^2)^2$.

Solución: Por ser una función continua y diferenciable en todo el plano los extremos relativos, si existen, se alcanzan en los puntos críticos. Se hallan las derivadas de primer y segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 4(x - y^2) = 4(x^3 - x + y^2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4(3x^2 - 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 + 8y(x - y^2) = 4y(2x - y^2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 8x - 12y^2 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son los puntos (x, y) que verifican:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 - x + y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(2x - y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x + y^2 = 0 \\ y(2x - y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x + y^2 = 0 \\ y = 0 \text{ o } 2x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema se distinguen por separado los dos casos que plantean la segunda condición:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 - x + y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^3 - x = x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 - x + y^2 = 0 \\ 2x - y^2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^3 - x + 2x = x(x^2 + 1) = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. El valor del hessiano en cada uno de estos puntos es:

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 4(3x^2 - 1) & 8y \\ 8y & 8x - 12y^2 \end{vmatrix} \implies Hf(0, 0) = 0; \quad Hf(1, 0) = 64; \quad Hf(-1, 0) = -64$$

Se estudia cada uno de ellos por separado:

- En $(0, 0)$, $Hf(0, 0) = 0$. Para decidir si en este punto la función alcanza un extremo relativo es necesario estudiar el comportamiento de la función alrededor del punto:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) - 0 = x^4 + y^4 - 2(x - y^2)^2 = \begin{cases} -y^4 < 0 & , \text{ si } x = 0 \text{ e } y \neq 0 \\ y^8 + y^4 > 0 & , \text{ si } x = y^2 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que en $(0, 0)$ no alcanza un extremo relativo (es un punto de silla).

- En $(1, 0)$, $Hf(1, 0) = 64$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 8 > 0$, por lo que la función alcanza un mínimo relativo con valor $f(1, 0) = -1$.
- En $(-1, 0)$, $Hf(-1, 0) = -64 < 0$, de donde se deduce que en $(-1, 0)$ no alcanza un extremo relativo (es un punto de silla).