FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM) CURSO 2004/2005
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA CÁLCULO INFINITESIMAL
Grupo 13M

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE (03/09/2005)
EXAMEN FINAL

1. (1 punto) Halla todas las soluciones de la ecuación $z^5 - i = 0$, y calcula su producto expresándolo en forma binómica.

2. (1 punto) Para los distintos valores del parámetro $a > 0$, calcula el límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n}$

3. (1,5 puntos)

a) Halla el dominio $D \subset \mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2}$.

b) Estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, si } x \in D \\ 1 & \text{, si } x \notin D \end{cases}$$

4. (1,5 puntos) De entre todas las elipses de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, que pasan por el punto $(1, 1)$, encuentra la de área mínima.

5. (1,5 puntos) Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|\cos x|}{3 + 3\sin x + \cos^2 x}$$

6. (1 punto) Estudia la convergencia de la siguiente serie y calcula, si es posible, su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n + 2n}{5^n}$$

7. (1,5 puntos) Se considera la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + \sin^2 y}{x^2 + y^2} & \text{, si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcula los límites de f en $(0, 0)$ según las rectas $y = mx$. ¿Es f continua en $(0, 0)$?
b) Estudia la diferenciabilidad de f en el punto $(0, \frac{\pi}{2})$.
c) Calcula la derivada direccional de f en $(0, \frac{\pi}{2})$ según la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1, 1)$.

8. (1 punto) Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y^2)^2$.

Duración del examen: 3h 30'