

CONVOCATORIA DE JUNIO (16/06/2005)
 EXAMEN FINAL

SOLUCIONES

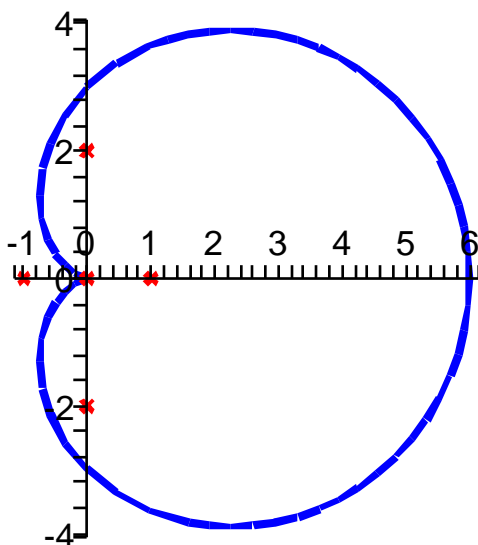
1. Resuelve la ecuación $z^5 + 3z^3 - 4z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, y determina las soluciones que pertenecen al interior de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar $\rho = 3(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Solución: Las soluciones de la ecuación se obtienen a partir de la descomposición factorial del polinomio:

$$z^5 + 3z^3 - 4z = z(z - 1)(z + 1)(z^2 + 4) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = \pm 1 \\ z = \pm 2i \end{cases}$$

Se dibuja la gráfica de la ecuación polar a partir de la tabla de valores:

θ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
ρ	6	\searrow	3	\searrow	0	\nearrow	3	\nearrow	6



Como se puede observar, las soluciones que pertenecen al interior de la región acotada por la gráfica son $z = 1$ y $z = \pm 2i$. La solución $z = -1$ está fuera de la región y $z = 0$ está en la frontera.

2. Calcula el valor del límite $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n}$, donde:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}$$

Solución: Se hallan los límites de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Para hallar el límite de la sucesión $\{a_n\}$ se toman logaritmos y se aplican infinitésimos:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3} \ln \frac{n+1}{n-1} = (\infty \cdot 0) \stackrel{I}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3} \left(\frac{n+1}{n-1} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3} \cdot \frac{2}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2+2)}{(n-3)(n-1)} = 2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2\end{aligned}$$

aunque también se podría haber hallado aplicando directamente la fórmula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = (1^\infty) = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3} \left(\frac{n+1}{n-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3} \cdot \frac{2}{n-1}} = e^2$$

Para hallar el límite de la sucesión $\{b_n\}$ se tiene en cuenta que b_n es la suma de n términos de los cuales el primero es el mayor y el último el más pequeño, y se aplica el principio del sandwich:

$$\begin{cases} \frac{n}{\sqrt{n+4n^2}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{1+4n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+4n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+4n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = (e^2)^{\frac{1}{2}} = e$$

3. Estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x(x-1)} & , \text{ si } x < 1, x \neq 0 \\ \frac{(x-1)\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Solución: La función es continua en su dominio: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Los puntos de discontinuidad son $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{-1}{x} \quad \text{no existe}$$

porque oscila indefinidamente entre -1 y 1 , la función tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} = (0 \cdot \text{acotado}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \stackrel{I}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\ln \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{3} \ln x} = 3\end{aligned}$$

de donde se deduce que en $x = 1$ hay una discontinuidad de salto.

4. Se considera la función: $f(x) = \ln \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

- Estudia dónde es derivable y calcula su derivada.
- Obtén los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.
- Halla las asíntotas y esboza su gráfica.

Solución:

a) Un punto $x \in \mathbb{R}$ pertenece al dominio de la función si:

$$\frac{1+|x|}{1-|x|} > 0 \iff 1-|x| > 0 \iff |x| < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

Por tanto, el dominio de la función es $D(f) = (-1, 1)$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1-x}{1+x} & , \text{ si } -1 < x < 0 \\ \ln \frac{1+x}{1-x} & , \text{ si } 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

de donde se deduce que es continua en el dominio. La función es derivable en cualquier $x \neq 0$, siendo:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\ln \frac{1-x}{1+x} \right)' = (\ln(1-x) - \ln(1+x))' = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-2}{1-x^2} & , \text{ si } -1 < x < 0 \\ \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = (\ln(1+x) - \ln(1-x))' = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} & , \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

y, puesto que f es continua y las dos funciones que intervienen en su definición son derivables en el origen:

$$f'(0^-) = \frac{-2}{1-x^2} \Big|_{x=0} = -2 \quad \quad f'(0^+) = \frac{2}{1-x^2} \Big|_{x=0} = 2$$

de donde se deduce que f no es derivable en $x = 0$ (presenta un punto anguloso).

b) El crecimiento se obtiene a partir del signo de la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1-x^2} < 0 & , \text{ si } -1 < x < 0 \\ \frac{2}{1-x^2} > 0 & , \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \implies \begin{cases} f \text{ es decreciente en el intervalo } (-1, 0) \\ f \text{ es creciente en el intervalo } (0, 1) \end{cases}$$

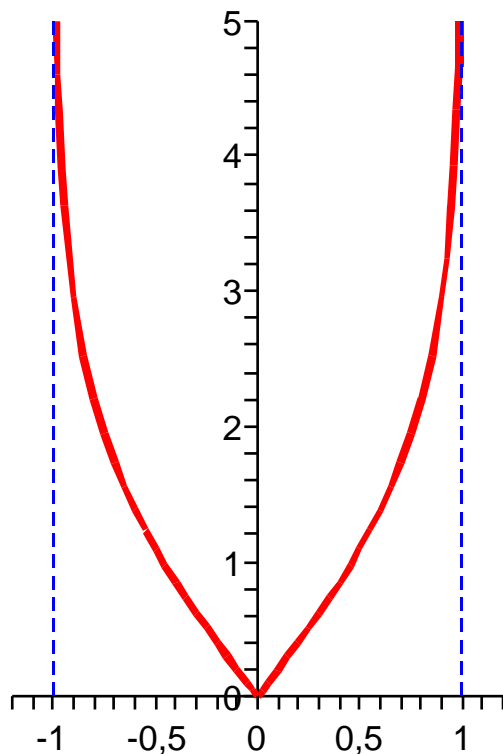
de donde se deduce que la función alcanza un mínimo relativo y absoluto en $x = 0$, cuyo valor es $f(0) = 0$.

c) Puesto que el dominio es un conjunto acotado, no hay asíntotas horizontales ni oblicuas. Sólo podría tener asíntotas verticales en los extremos del dominio, donde:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1-x}{1+x} = +\infty \implies x = -1 \text{ es asíntota vertical por la derecha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1+x}{1-x} = +\infty \implies x = 1 \text{ es asíntota vertical por la izquierda}$$

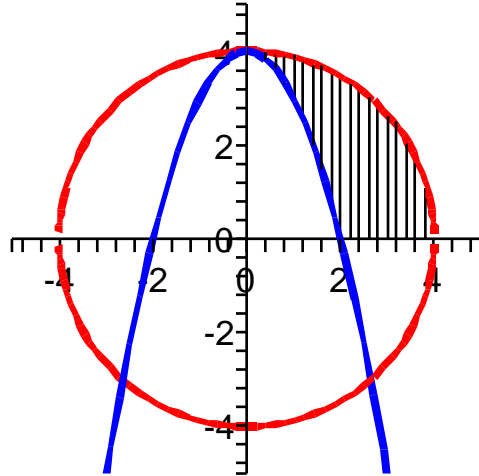
A la vista de los datos obtenidos, un esbozo de la gráfica es:



5. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, y \geq -x^2 + 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Solución: Se representa el conjunto Ω :



y, puesto que el eje de giro es el eje de ordenadas, se considera su expresión proyectando sobre dicho eje:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{16-y^2}\}$$

Entonces, el volumen de sólido de revolución es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{16-y^2})^2 - (\sqrt{4-y})^2 \right] dy = \pi \int_0^4 (12 + y - y^2) dy = \pi \left[12y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^4 = \\ &= \pi \left(48 + 8 - \frac{64}{3} \right) = \frac{104\pi}{3} \end{aligned}$$

6. Obtén el campo de convergencia de la serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2}$.

Solución: El radio de convergencia de la serie es el número R que verifica:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{7} \implies R = 7$$

de donde se deduce que la serie es convergente si:

$$|x-1| < 7 \iff -7 < x-1 < 7 \iff -6 < x < 8 \iff x \in (-6, 8)$$

es divergente si $x \in (-\infty, -6) \cup (8, +\infty)$, y no se sabe cuando $x = -6$ y $x = 8$. En estos casos:

$$\begin{aligned} x = -6 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{que es convergente} \\ x = 8 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{que es convergente} \end{aligned}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie es el intervalo cerrado $[-6, 8]$.

7. Se considera la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 2e^{-y} & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcula sus derivadas parciales en el punto $(0, 0)$.

b) Halla la derivada direccional en el punto $(1, 1)$ con la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2)$.

Solución:

a) Usando la definición, las derivadas parciales en el origen son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{\pi}{x} + 2 \frac{e^x - 1}{x} \right) = \\ &= \left(0 \cdot \text{acotado} + 2 \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} 0 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2e^{-y} - 2}{y} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2e^{-y}}{1} = -2$$

b) Las derivadas parciales en los puntos (x, y) con $x \neq 0$ y, en particular, en el punto $(1, 1)$ son:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos \frac{\pi}{x} + \pi \sin \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2e^{x-y} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2 \end{cases} \implies \nabla f(1, 1) = (0, -2)$$

y entonces, la derivada direccional en el punto $(1, 1)$ con la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2)$ es:

$$D_{\vec{v}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, -2) \cdot \frac{(-1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{5}}$$

8. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - y(x - 1)$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 2\}$.

Solución: Puesto que la función es continua en el conjunto A , que es compacto, tiene mínimo y máximo absolutos. Estos valores los debe alcanzar en los puntos críticos, que se hallan usando los multiplicadores de Lagrange:

$$F(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - y(x - 1) + \lambda [(x - 1)^2 + y^2 - 2]$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 1) - y + 2(x - 1)\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - (x - 1) + 2y\lambda = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2(x-1)} - 1 = \frac{x-1}{2y} - 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x - 1)^2 = y^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} (x - 1)^2 - y^2 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} (x - 1)^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0, 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

con lo que se obtienen los puntos $(0, \pm 1)$ y $(2, \pm 1)$. Para hallar los extremos absolutos se evalúa la función en los cuatro puntos críticos:

$$f(0, 1) = 3 \quad f(0, -1) = 1 \quad f(2, 1) = 1 \quad f(2, -1) = 3$$

de donde se deduce que:

- El mínimo absoluto es $m = 1$ y lo alcanza en los puntos $(0, -1)$ y $(2, 1)$.
- El máximo absoluto es $M = 3$ y lo alcanza en los puntos $(0, 1)$ y $(2, -1)$.