FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM) **CURSO 2004/2005**
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA **CÁLCULO INFINITESIMAL**
Grupo 13M

CONVOCATORIA DE JUNIO (16/06/2005)
EXAMEN FINAL

1. (1 punto) Resuelve la ecuación $z^5 + 3z^3 - 4z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, y determina las soluciones que pertenecen al interior de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar $\rho = 3(1+\cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

2. (1 punto) Calcula el valor del límite $l = \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$, donde:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{1+4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+4n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+4n^2}}$$

3. (1 punto) Estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x(x-1)} & \text{, si } x < 1,\ x \neq 0 \\ \frac{(x-1)\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} & \text{, si } x > 1 \end{cases}$$

4. (2 puntos) Se considera la función: $f(x) = \ln \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$.

a) Estudia dónde es derivable y calcula su derivada.
b) Obtén los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.
c) Halla las asíntotas y esboza su gráfica.

5. (1,5 puntos) Calcula el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq -x^2 + 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

6. (1 punto) Obtén el campo de convergencia de la serie de potencias: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2}$.

7. (1,5 puntos) Se considera la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} & \text{, si } x \neq 0 \\ 2e^{-y} & \text{, si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcula sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$.
b) Halla la derivada direccional en el punto $(1,1)$ con la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$.

8. (1 punto) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - y(x-1)$ en el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 = 2\right\}$.

Duración del examen: 3h 30'