

CONVOCATORIA DE FEBRERO (16/06/2005)
 SEGUNDO PARCIAL

SOLUCIONES

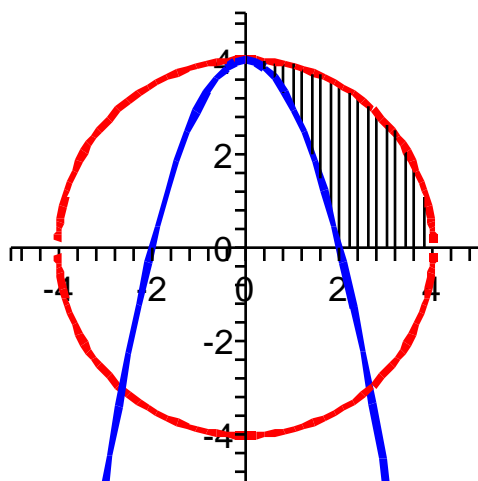
1. a) *Calcula el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje de ordenadas la región:*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, y \geq -x^2 + 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

b) *Calcula el área de la región comprendida entre el eje de abscisas y la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)e^{-x}$, $x \geq 1$.*

Solución:

a) Se representa el conjunto Ω :



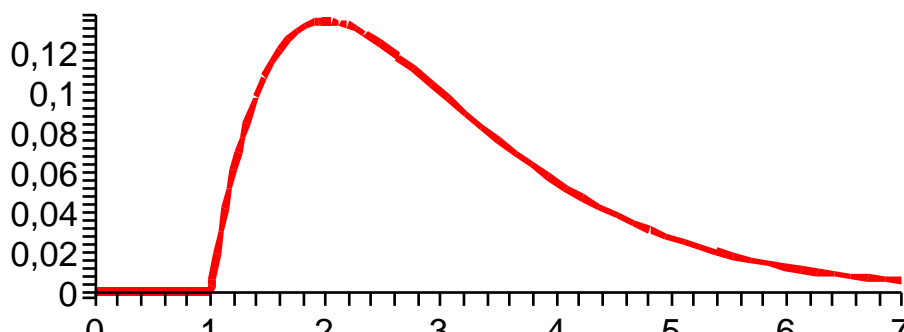
y, puesto que el eje de giro es el eje de ordenadas, se considera su expresión proyectando sobre dicho eje:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{4 - y} \leq x \leq \sqrt{16 - y^2}\}$$

Entonces, el volumen de sólido de revolución es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{16 - y^2})^2 - (\sqrt{4 - y})^2 \right] dy = \pi \int_0^4 (12 + y - y^2) dy = \pi \left[12y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^4 = \\ &= \pi \left(48 + 8 - \frac{64}{3} \right) = \frac{104\pi}{3} \end{aligned}$$

b) En $x \geq 1$ la función es positiva, siendo su gráfica:



El área de la región comprendida entre el eje de abscisas y la gráfica de la función es:

$$A = \int_1^{\infty} (x-1)e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R (x-1)e^{-x} dx$$

ya que la integral es impropia con intervalo de integración no acotado. Se calcula por partes la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int (x-1)e^{-x} dx &= \left(\begin{array}{l} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right) = -(x-1)e^{-x} + \int e^{-x} dx = \\ &= -(x-1)e^{-x} - e^{-x} + c = -xe^{-x} + c \end{aligned}$$

y entonces el área es:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R (x-1)e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [-xe^{-x}]_{x=1}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} [-Re^{-R} - (-e^{-1})] = \\ &= e^{-1} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{e^R} \stackrel{H}{=} e^{-1} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R} = e^{-1} - 0 = e^{-1} \end{aligned}$$

2. Se considera la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$, donde $f_n(x) = \frac{n+1}{n} \left(x + \frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

- a) Estudia la convergencia puntual.
b) Estudia la convergencia uniforme en el intervalo $[1, 2]$.

Solución:

a) La sucesión de funciones converge puntualmente a la función:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

b) Para estudiar la convergencia uniforme en $[1, 2]$ se utiliza el criterio del supremo. Puesto que:

$$\begin{aligned} M_n &= \sup_{x \in [1, 2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{n+1}{n} \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \right| = \sup_{x \in [1, 2]} \left| \left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) \right| = \\ &= \sup_{x \in [1, 2]} \frac{1}{n} \left(x + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{n} \left(2 + \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \end{aligned}$$

la convergencia es uniforme en el intervalo $[1, 2]$.

3. Obtén el campo de convergencia de las series de potencias:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{7^n n}$$

Solución:

a) El radio de convergencia de la serie es el número R que verifica:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{7} \implies R = 7$$

de donde se deduce que la serie es convergente si:

$$|x-1| < 7 \iff -7 < x-1 < 7 \iff -6 < x < 8 \iff x \in (-6, 8)$$

es divergente si $x \in (-\infty, -6) \cup (8, +\infty)$, y no se sabe cuando $x = -6$ y $x = 8$. En estos casos:

$$x = -6 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{que es convergente}$$

$$x = 8 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{que es convergente}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie es el intervalo cerrado $[-6, 8]$.

b) Puesto que esta serie es la serie derivada de la anterior, su radio e intervalo abierto de convergencia son los mismos y sólo hay que estudiar los extremos de dicho intervalo:

$$x = -6 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{7^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^{n-1}}{7^n n} = \frac{-1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{que es convergente}$$

$$x = 8 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{7^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{7^n n} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{que es divergente}$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie es el intervalo semiabierto $[-6, 8)$.

4. Se considera la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 2e^{-y} & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcula sus derivadas parciales en el punto $(0, 0)$.

b) Halla la derivada direccional en el punto $(1, 1)$ con la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2)$.

Solución:

a) Usando la definición, las derivadas parciales en el origen son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{\pi}{x} + 2 \frac{e^x - 1}{x} \right) = \\ &= \left(0 \cdot \text{acotado} + 2 \frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} 0 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2e^{-y} - 2}{y} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2e^{-y}}{1} = -2 \end{aligned}$$

b) Las derivadas parciales en los puntos (x, y) con $x \neq 0$ y, en particular, en el punto $(1, 1)$ son:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos \frac{\pi}{x} + \pi \sin \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2e^{x-y} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2 \end{cases} \implies \nabla f(1, 1) = (0, -2)$$

y entonces, la derivada direccional en el punto $(1, 1)$ con la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2)$ es:

$$D_{\vec{v}} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, -2) \cdot \frac{(-1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{5}}$$

5. Se considera la función:

$$f(x, y) = ax^2 - x - b + \int_0^y \ln(2 + t^2) dt$$

Determina los valores de a y b para que $z - 5 = -(x - 1) + 2y$ sea el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$.

Solución: Si $z - 5 = -(x - 1) + 2y$ es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$, entonces se ha de cumplir que:

$$f(1, 0) = 5 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2$$

Imponiendo estas condiciones, se obtienen los valores de a y b :

$$\begin{cases} f(1, 0) = -1 - b = 5 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2axy - 1|_{(1,0)} = -1 = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = ax^2 + \ln(2 + y^2)|_{(1,0)} = a + \ln 2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 - \ln 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

6. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - y(x - 1)$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 2\}$.

Solución: Puesto que la función es continua y el conjunto A es compacto, alcanza mínimo y máximo absolutos. Estos valores los debe alcanzar en puntos críticos del interior o de la frontera. Los puntos críticos del interior son:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - 1) - y = 2x - y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - (x - 1) = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \implies (x, y) = (1, 0) \in \overset{\circ}{A}$$

Para hallar los puntos críticos en la frontera se usan los multiplicadores de Lagrange considerando la función:

$$F(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - y(x - 1) + \lambda [(x - 1)^2 + y^2 - 2]$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 1) - y + 2(x - 1)\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - (x - 1) + 2y\lambda = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2(x-1)} - 1 = \frac{x-1}{2y} - 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x - 1)^2 = y^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (x - 1)^2 - y^2 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x - 1)^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0, 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

con lo que se obtienen los puntos $(0, \pm 1)$ y $(2, \pm 1)$. Para hallar los extremos absolutos se evalúa la función en los cinco puntos críticos:

$$f(1, 0) = 0 \quad f(0, 1) = 3 \quad f(0, -1) = 1 \quad f(2, 1) = 1 \quad f(2, -1) = 3$$

de donde se deduce que:

- El mínimo absoluto es $m = 0$ y lo alcanza en el punto $(1, 0)$.
- El máximo absoluto es $M = 3$ y lo alcanza en los puntos $(0, 1)$ y $(2, -1)$.