

CONVOCATORIA DE FEBRERO (26/01/2005)
PRIMER PARCIAL

SOLUCIONES

1. (1 punto) Si $z = -1 + i$ es un cero simple del polinomio $P(z) = z^6 + 2z^5 + 2z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z$, determina todos sus ceros en forma binómica.

Solución: Puesto que los coeficientes del polinomio son reales, si $z = -1 + i$ es un cero simple también lo es su conjugado $z = -1 - i$ y el polinomio será divisible por:

$$(z - (-1 + i))(z - (-1 - i)) = ((z + 1) - i)((z + 1) + i) = (z + 1)^2 - i^2 = z^2 + 2z + 2$$

Efectuando dicha división:

$$\frac{P(z)}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z^6 + 2z^5 + 2z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z}{z^2 + 2z + 2} = z^4 - z = z(z^3 - 1)$$

y entonces:

$$P(z) = (z^2 + 2z + 2)z(z^3 - 1) = 0 \iff \begin{cases} z^2 + 2z + 2 = 0 \iff z = -1 \pm i \\ z = 0 \\ z^3 - 1 = 0 \iff z = \sqrt[3]{1} \end{cases}$$

Puesto que las raíces cúbicas de la unidad son:

$$z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{i0}} = e^{i\frac{0+2k\pi}{3}} = \begin{cases} e^{i0} = 1 & , \text{ si } k = 0 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & , \text{ si } k = 1 \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & , \text{ si } k = 2 \end{cases}$$

los ceros del polinomio, todos ellos simples, son: $z = -1 \pm i$, $z = 0$, $z = 1$ y $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. (1 punto) Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Justifica razonadamente si son siempre correctos los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \qquad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)g(x)}{f(x)^2 + g(x)^2} = 1$$

Solución:

a) No siempre es correcto. Por ejemplo, si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$$

b) Siempre es correcto. Si se divide numerador y denominador por el producto de las dos funciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)g(x)}{f(x)^2 + g(x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{2}{1 + 1} = 1$$

3. (1,5 puntos) Halla el dominio y estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x-2} \cdot \left| \frac{x-2}{x} \right| \cdot e^{-1/|x+1|}$$

Solución: La función es continua en su dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$. El límite en los puntos de discontinuidad es:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{\sin(-1)}{-3} \cdot \left| \frac{-3}{-1} \right| \cdot \lim_{x \rightarrow -1} e^{-1/|x+1|} = (\sin 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} e^{-1/|x+1|} = (\sin 1) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|-2|}{-2} \cdot e^{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \frac{-1}{e} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{|x|} \right) = \begin{cases} 1/e & , \text{ si } x \rightarrow 0^- \\ -1/e & , \text{ si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\sin 2}{2} \cdot e^{-1/3} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} -\frac{\sin 2}{2} e^{-1/3} & , \text{ si } x \rightarrow 2^- \\ \frac{\sin 2}{2} e^{-1/3} & , \text{ si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

de donde se deduce que presenta una discontinuidad evitable en $x = -1$ y discontinuidades de salto en $x = 0$ y en $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{2x-1}{(x+1)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina sus asíntotas.

b) Estudia su derivabilidad y calcula la derivada.

c) Calcula sus extremos absolutos en el intervalo $[\frac{-1}{2}, 3]$.

Solución:

a) Las funciones que aparecen en la definición a trozos de f son continuas donde intervienen, $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ en $x < 0$ e $y = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ en $x > 0$, y en el punto de cambio:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = -1 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0) \implies f \text{ es continua en } x = 0$$

Por tanto, la función f es continua en \mathbb{R} y no puede tener asíntotas verticales. Para buscar asíntotas horizontales se hallan los límites en el infinito:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \implies \text{no hay asíntota horizontal en } -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0 \implies \text{asíntota horizontal } y = 0 \text{ en } +\infty \end{cases}$$

Puesto que en $-\infty$ el grado del numerador supera en una unidad al del denominador, la función tiene asíntota oblicua que se puede hallar efectuando la división:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1} \implies \text{asíntota oblicua } y = x+1 \text{ en } -\infty$$

b) Las funciones que aparecen en la definición son derivables donde intervienen. Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} & , \text{ si } x < 0 \\ \frac{2(x+1)^2-(2x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} & , \text{ si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} & , \text{ si } x < 0 \\ \frac{-2x+4}{(x+1)^3} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Puesto que f es continua y las dos funciones que intervienen son derivables en el punto de cambio $x = 0$, las derivadas laterales son:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right)'_{x=0} = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \right)'_{x=0} = -1 \\ f'(0^+) = \left(\frac{2x-1}{(x+1)^2} \right)'_{x=0} = \left(\frac{-2x+4}{(x+1)^3} \right)'_{x=0} = 4 \end{cases} \implies f \text{ no es derivable en } x = 0 \text{ (punto anguloso)}$$

c) Los puntos críticos de la función f son:

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 & , \text{ con } x < 0 \\ \frac{-2x+4}{(x+1)^3} = 0 & , \text{ con } x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 & , \text{ con } x < 0 \\ -2x + 4 = 0 & , \text{ con } x > 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \simeq -0,41 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ambos puntos pertenecen al intervalo $[-\frac{1}{2}, 3]$, donde hay que hallar los extremos absolutos. El crecimiento en dicho intervalo y los extremos relativos se obtienen a partir del signo de la derivada:

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x < 1 - \sqrt{2} \\ < 0, \text{ si } 1 - \sqrt{2} < x < 0 \\ > 0, \text{ si } 0 < x < 2 \\ < 0, \text{ si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{máximo relativo en } x = 1 - \sqrt{2} \\ \text{máximo relativo en } x = 2 \end{cases}$$

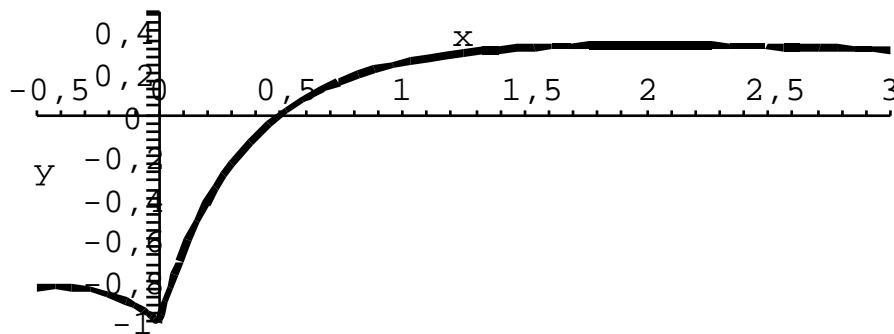
siendo:

$$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{(1 - \sqrt{2}) - 1} = 2(1 - \sqrt{2}) \simeq -0,82 \quad f(2) = \frac{1}{3}$$

Para hallar los extremos absolutos es necesario hallar el valor de la función en los extremos del intervalo y en el punto donde no es derivable:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-5}{6} \simeq -0,83 \quad f(0) = -1 \quad f(3) = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Comparando estos valores con los que toma en los máximos relativos, en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 3]$ la función toma el máximo absoluto en $x = 2$ con valor $f(2) = \frac{1}{3}$ y el mínimo absoluto en $x = 0$ con valor $f(0) = -1$. La representación gráfica de la función en este intervalo es:



5. (1,5 puntos) Se considera la función: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

a) Obtén su polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$.

b) Utilizando el polinomio anterior, calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ y halla una cota del error cometido.

Solución:

a) Para hallar el polinomio de Taylor de grado 3 se calcula el valor de la función y los valores de sus tres primeras derivadas en el origen:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}; \quad f(0) = 1 \quad f''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3}; \quad f''(0) = \frac{-2}{9} \\ f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}; \quad f'(0) = \frac{1}{3} \quad f'''(x) = \frac{10}{27}(x+1)^{-8/3}; \quad f'''(0) = \frac{10}{27}$$

y entonces, el polinomio de Taylor es:

$$P(x) = P_3^{x=0}(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{-2/9}{2!}x^2 + \frac{10/27}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$$

b) Puesto que $\sqrt[3]{2} = f(1)$, un valor aproximado de esta raíz es:

$$\sqrt[3]{2} = f(1) \simeq P(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81} = \frac{104}{81} \simeq 1,284$$

Para hallar una cota del error cometido, se calcula el término complementario:

$$f^{(4)}(x) = \frac{-80}{81}(x+1)^{-11/3} \implies T(x) = \frac{\frac{-80}{81}(\alpha+1)^{-11/3}}{4!}x^4 = \frac{-10x^4}{243(\alpha+1)^{11/3}}, \text{ con } \alpha \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

El error cometido es:

$$T(1) = \frac{-10}{243(\alpha+1)^{11/3}}, \text{ con } 0 < \alpha < 1 \implies \text{error} = |T(1)| \leq \frac{10}{243(0+1)^{11/3}} = \frac{10}{243} \simeq 0,041$$

6. (2 puntos)

a) Siendo $\alpha > 0$, calcula el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n^\alpha}$

b) Calcula, si existe, el límite de la siguiente sucesión recurrente $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n - 6} \\ a_1 = 0 \end{cases}$, y determina los extremos (supremo, máximo, ínfimo y mínimo) del conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ formado por todos los términos de la sucesión.

Solución:

a) Llamando:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \ln n^\alpha = \alpha \ln n$$

y usando el criterio de Stolz (S) e infinitésimos equivalentes (I):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \stackrel{S}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha \ln n - \alpha \ln(n-1)} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln \frac{n}{n-1}} \stackrel{I}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(\frac{n}{n-1} - 1 \right)} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

b) Usando la fórmula recurrente que define la sucesión:

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 = (7a_n - 6) - (7a_{n-1} - 6) = 7(a_n - a_{n-1}) \implies \text{signo}(a_{n+1} - a_n) = \text{signo}(a_n - a_{n-1})$$

de donde se deduce que la sucesión es monótona y, puesto que:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \sqrt[3]{7 \cdot 0 - 6} = \sqrt[3]{-6} \end{cases} \implies a_2 - a_1 = \sqrt[3]{-6} < 0$$

la sucesión es monótona decreciente y, además, todos sus términos son negativos (excepto el primero que es cero). Por el método de inducción se puede probar que la sucesión está acotada inferiormente por -3 :

- $a_1 = 0 > -3$
- $a_n > -3 \implies a_n + 3 > 0 \implies a_{n+1}^3 + 27 = 7a_n - 6 + 27 = 7(a_n + 3) > 0 \implies a_{n+1}^3 > -27 \implies a_{n+1} > -3$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente y acotada ($-3 < a_n \leq 0$). En consecuencia tiene límite $l \in [-3, 0]$ que se puede hallar tomando límites en la fórmula de recurrencia:

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n - 6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l = \sqrt[3]{7l - 6} \implies l^3 - 7l + 6 = 0 \implies l = -3, 1, 2$$

La única solución posible para el límite de esta sucesión es $l = -3$. Los extremos del conjunto A , formado por todos los términos de la sucesión, son:

$$\text{supremo} = \text{máximo} = 0 \qquad \text{ínfimo} = -3 \qquad \text{mínimo: no existe}$$

7. (1 punto) Dada la curva $\left\{ x = \frac{t+1}{t^2+1}, y = \frac{t^2+2}{t} \right\}$, halla la ecuación de su recta tangente en los puntos de corte con los ejes.

Solución: Se hallan los puntos de corte con los ejes:

$$x = \frac{t+1}{t^2+1} = 0 \iff t = -1 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{t^2+2}{t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

El único punto de corte se obtiene para $t = -1$ y es: $(0, -3)$. La pendiente en este punto es:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2+1-2t(t+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{1-2t-t^2}{(t^2+1)^2} \\ y'(t) = \frac{2t^2-(t^2+2)}{t^2} = \frac{t^2-2}{t^2} \end{cases} \implies \begin{cases} x'(-1) = \frac{1}{2} \\ y'(-1) = -1 \end{cases} \implies m = \frac{y'(-1)}{x'(-1)} = \frac{-1}{1/2} = -2$$

y la recta tangente:

$$y - (-3) = -2(x - 0) \implies 2x + y + 3 = 0$$