CONVOCATORIA DE FEBRERO (26/01/2005)
PRIMER PARCIAL

1. (1 punto) Si $z = -1 + i$ es un cero simple del polinomio $P(z) = z^6 + 2z^5 + 2z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z$, determina todos sus ceros en forma binómica.

2. (1 punto) Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Justifica razonadamente si son siempre correctos los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2f(x)g(x)}{f(x)^2 + g(x)^2} = 1$

3. (1,5 puntos) Halla el dominio y estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x-2} \cdot \left| \frac{x-2}{x} \right| \cdot e^{-1/|x+1|}$$

4. (2 puntos) Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & , \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-1}{(x+1)^2} & , \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina sus asíntotas.
b) Estudia su derivabilidad y calcula la derivada.
c) Calcula sus extremos absolutos en el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$.

5. (1,5 puntos) Se considera la función: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
a) Obtén su polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$.
b) Utilizando el polinomio anterior, calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ y halla una cota del error cometido.

6. (2 puntos)

a) Siendo $\alpha > 0$, calcula el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n^\alpha}$

b) Calcula, si existe, el límite de la siguiente sucesión recurrente $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n - 6} \\ a_1 = 0 \end{cases}$, y determina los extremos (supremo, máximo, ínfimo y mínimo) del conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ formado por todos los términos de la sucesión.

7. (1 punto) Dada la curva $\left\{ x = \frac{t+1}{t^2+1},\ y = \frac{t^2+2}{t} \right\}$, halla la ecuación de su recta tangente en los puntos de corte con los ejes.

Duración del examen: 3 horas