SOLUCIONES SEGUNDO PARCIAL
Septiembre 2004

Ejercicio 1

a) $\dfrac{\log(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)}{n\log(n)} = \dfrac{\log(n!)}{\log n^n} \approx \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Aplicando el criterio de Stolz, el límite pedido coincide con el siguiente (si existe):

$$\frac{\log(n+1)!-\log n!}{\log(n+1)^{(n+1)}-\log n^n} = \frac{\log\dfrac{(n+1)!}{n!}}{\log\dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n}} = \frac{\log(n+1)}{\log\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n(n+1)\right]} = \frac{\log(n+1)}{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n+\log(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)}+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)} = 0$, y el límite pedido es 1.

b) Aplicando el criterio de la raíz, estudiamos la convergencia absoluta:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2|x|^{n-1}} = |x|$. La serie converge si $|x|<1$. Estudiamos en los extremos:

Si x=1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ es divergente y si x=-1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$, también es divergente.

El campo de convergencia es el intervalo (-1,1).

Llamando f a la función suma, se tiene: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$. Integrando:

$\int f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, que es una serie aritmético-geométrica de razón x con primer término x, luego la suma es: $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Si ahora, en la expresión $\int f(x)dx = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, derivamos:

$f(x) = \left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, para x en el intervalo (-1,1).

Ejercicio 2

La curva en polares $\rho = \dfrac{sen2\theta}{\theta}$ pasa por (0,0) en los puntos solución de la ecuación $\rho = 0$, que son: $\theta = k\dfrac{\pi}{2}$, para cada k entero. En el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ son: $\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ y 2π.

Para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $\rho = 0$. Se tiene el punto P_1=(0,0).

Para $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$: $\rho \approx -0.4$. Se tiene el punto P_2=$(0.4, \dfrac{7\pi}{4})$.

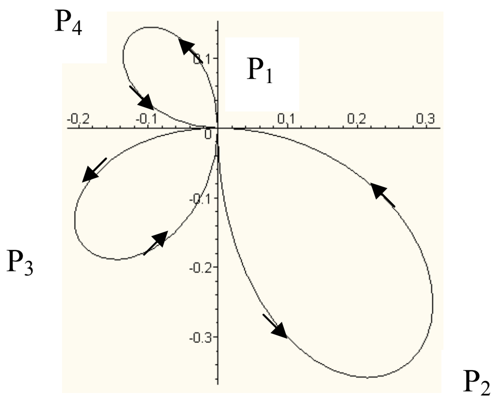
Para $\theta = \pi$: $\rho = 0$. Se tiene el punto P_1=(0,0).

Para $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$: $\rho \approx 0.2$. Se tiene el punto P_3=$(0.2, \dfrac{5\pi}{4})$.

Para $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$: $\rho = 0$. Se tiene el punto P_1=(0,0).

Para $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$: $\rho \approx -0.1$ Se tiene el punto P_4=$(0.1, \dfrac{3\pi}{4})$.

Para $\theta = 2\pi$: $\rho = 0$. Se tiene el punto P_1=(0,0).



El sentido de recorrido es: P_1, P_2, P_1, P_3, P_1, P_4, P_1, como indican las flechas de la figura.

Nota: los puntos están en coordenadas polares.

Ejercicio 3

a) Las coordenadas polares en el punto (-1,2) son: $\begin{cases} x = -1 + \rho\cos\theta \\ y = 2 + \rho sen\theta \end{cases}$

$$\frac{(-1+\rho\cos\theta)^2 + (2+\rho sen\theta)^2 - 5}{-1+\rho\cos\theta + 2 + \rho sen\theta - 1} = \frac{\rho - 2(\cos\theta - 2sen\theta)}{\cos\theta + sen\theta}$$

El límite cuando $\rho \to 0$ depende del ángulo, luego el límite pedido no existe.

b) Las rectas que pasan por el punto (-1,2) son: $y = 2 + m(x+1)$, m es la pendiente $(m \neq -1)$

$$\frac{x^2 + (2+m(x+1))^2 - 5}{x+2+m(x+1)-1} = \frac{x^2 + 4 + m^2(x+1)^2 + 4m(x+1) - 5}{x+2+m(x+1)-1}$$

Al calcular el límite cuando $x \to -1$, queda $\frac{0}{0}$. Aplicando L´Hopital:

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x + m^2 2(x+1) + 4m}{1+m} = \frac{-2+4m}{1+m}$. Como depende de m, el límite pedido no existe.

Ejercicio 4

a) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2}}{x} = 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

b) Para cada (x,y)≠(0,0), las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

Para ver que son continuas en (0,0), calculo los límites de las anteriores en (0,0). Paso a polares:

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho + \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\rho^2 sen\theta\cos\theta}{\rho} - 1\right) = -1$$

c) Como la función es diferenciable:

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \frac{v}{\|v\|} = (0,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 5

El desarrollo en serie de potencias de la función exponencial es:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, para todo x real, de donde:

$e^{(x-1)^2} = 1 + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^4}{2!} + \frac{(x-1)^6}{3!} + \cdots$, para todo x real.

El desarrollo en serie de potencias de la función coseno es:

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots$, para todo y real.

Entonces: $f(x,y) = \left[1 + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^4}{2!} + \frac{(x-1)^6}{3!} + \cdots\right]\left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right]$

Y el polinomio de grado 5 es:

$$P(x,y) = 1 + (x-1)^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{(x-1)^2 y^2}{2}$$

Ejercicio 6

El máximo y el mínimo existen porque se trata de una función continua en un compacto.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, tomamos la función auxiliar:

$F(x,y) = (x - 2y + 5z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 30)$

Los extremos se encuentran entre los puntos estacionarios de F, que son las soluciones de:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 5 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-5}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{25}{4\lambda^2} = 30 \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Dos soluciones:

$\lambda = \frac{1}{2}; x = -1; y = 2; z = -5$ y $\lambda = \frac{-1}{2}; x = 1; y = -2; z = 5$

Como:

$f(-1,2,-5) = -1 - 4 - 25 = -30$ y $f(1,-2,5) = 1 + 4 + 25 = 30$

El máximo es 30 y el mínimo es –30.