FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM) **CURSO 2003/2004**
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA **CÁLCULO INFINITESIMAL**
Grupo 13M

EXAMEN FINAL DE JUNIO (17/06/2004)
SEGUNDO PARCIAL

SOLUCIONES

Problema 1.

Calcula el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}{n^n}}$

Solución: Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \text{con} \quad a_n = \frac{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}{n^n}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3(n+1)+1)(3(n+1)+2)\dots(3(n+1)+(n+1))}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}{n^n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)(3n+5)\dots(3n+n+4)}{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+n+1)(3n+n+2)(3n+n+3)(3n+n+4)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \frac{4^4}{3^3 e} = \frac{256}{27e}
\end{aligned}$$

el límite es:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}{n^n}} = \frac{256}{27e}$$

Problema 2.

Halla el campo de convergencia de la siguiente serie de potencias: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^{2n}}{n^3 2^{n+1}}$

Solución: Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo se obtiene una serie numérica a la que se le aplica el criterio de la raíz. Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(n+2)x^{2n}}{n^3 2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)\,|x|^{2n}}{n^3 2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \sqrt[n]{2}} \cdot \frac{|x|^2}{2} = \frac{|x|^2}{2}$$

entonces:

- La serie converge si $\frac{|x|^2}{2} < 1$, es decir, si $|x| < \sqrt{2}$.
- La serie diverge si $\frac{|x|^2}{2} > 1$, es decir, si $|x| > \sqrt{2}$.

- Si $\frac{|x|^2}{2} = 1$, es decir, si $x = \pm\sqrt{2}$, la serie obtenida es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(\pm\sqrt{2})^{2n}}{n^3 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)2^n}{n^3 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Por tanto, el campo de convergencia de la serie de potencias es el intervalo $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Problema 3.
Dibuja la curva cuya expresión en coordenadas polares es $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$. Indica el sentido de recorrido.

Solución: Puesto que la función seno es periódica de periodo 2π y:

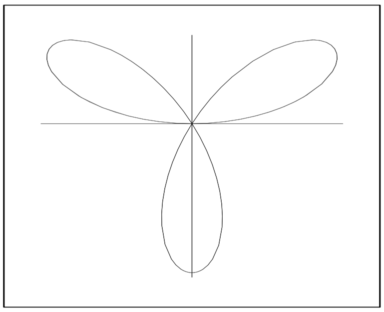
$$0 \leq 3\theta \leq 2\pi \implies 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

esta curva es periódica de periodo $\frac{2\pi}{3}$, existiendo sólo en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, ya que:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \implies 0 \leq 3\theta \leq \pi \implies \operatorname{sen} 3\theta \geq 0 \\ \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \implies \pi \leq 3\theta \leq 2\pi \implies \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \end{cases}$$

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen} 3\theta$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Su representación gráfica es:



Problema 4.
Halla el dominio de la función:

$$f(x,y) = e^{\frac{(y-2)^3}{x^2+y^2+4-4y}}$$

y extiéndela por continuidad a los puntos de la frontera del dominio. Estudia su diferenciabilidad en $(0,2)$.

Solución: El dominio de la función es:

$$D = \left\{(x,y) \,:\, x^2+y^2+4-4y \neq 0\right\} = \left\{(x,y) \,:\, x^2+(y-2)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$$

La frontera del dominio es el punto $(0,2)$ donde, usando coordenadas polares centradas en dicho punto, el límite de la función es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} e^{\frac{(y-2)^3}{x^2+(y-2)^2}} = \left(\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = 2+\rho\operatorname{sen}\theta \end{array}\right) = \lim_{\rho\to 0} e^{\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} e^{\rho\cos^3\theta} = 1$$

Por tanto, para que la función sea continua, su valor en la frontera debe ser $f(0,2)=1$.
Para estudiar la diferenciabilidad de la función en el punto $(0,2)$ se hallan las derivadas parciales en dicho punto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,2)-f(0,2)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=\lim_{y\to 2}\frac{f(0,y)-f(0,2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{e^{y-2}-1}{y-2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{=}\lim_{y\to 2}\frac{e^{y-2}}{1}=1$$

y entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{f(x,y)-f(0,2)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)}{\left[(x-0)^2+(y-2)^2\right]^{1/2}}=$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{f(x,y)-1-(y-2)}{\left[x^2+(y-2)^2\right]^{1/2}}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{e^{\frac{(y-2)^3}{x^2+(y-2)^2}}-1-(y-2)}{\left[x^2+(y-2)^2\right]^{1/2}}$$

Pasando a coordenadas polares generalizadas ($x=\rho\cos\theta$, $y=2+\rho\operatorname{sen}\theta$), este límite es:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho\operatorname{sen}^3\theta}-1-\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{=}\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho\operatorname{sen}^3\theta}\operatorname{sen}^3\theta-\operatorname{sen}\theta}{1}=\operatorname{sen}^3\theta-\operatorname{sen}\theta$$

Puesto que este límite depende de θ, el límite doble en $(0,2)$ no existe y la función f no es diferenciable en $(0,2)$.

Problema 5.
Halla la distancia mínima de la elipse $x^2+2y^2=6$ a la recta $x+y=5$.

Solución: Dibujando la elipse, cuyos semiejes son $a=\sqrt{6}$ y $b=\sqrt{3}$, se observa que la elipse está en el semiplano $x+y<5$. Por tanto, la distancia de un punto $P(x,y)$ de la elipse a la recta $x+y=5$ es:

$$d(x,y)=\frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5-x-y}{\sqrt{2}}$$

Para hallar los extremos relativos de la función $d(x,y)$ condicionados a que el punto $P(x,y)$ pertenezca a la elipse, es decir, que verifique $x^2+2y^2=6$, se define la función auxiliar:

$$F(x,y)=\frac{5-x-y}{\sqrt{2}}+\lambda\left(x^2+2y^2-6\right)$$

Las condiciones necesarias para los extremos condicionados son:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-1}{\sqrt{2}}+2\lambda x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{-1}{\sqrt{2}}+4\lambda y=0\\ x^2+2y^2-6=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2\lambda x=4\lambda y=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x^2+2y^2=6\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda\neq 0\\ x=2y\\ x^2+2y^2=6\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2y\\ y^2=1\end{cases}$$

con lo que se obtienen los puntos $P_1(2,1)$ y $P_2(-2,-1)$. Se halla la distancia de estos dos puntos a la recta:

$$d(2,1)=\frac{5-2-1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\qquad d(-2,-1)=\frac{5+2+1}{\sqrt{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

Por tanto, la distancia mínima entre la elipse y la recta es $d=\sqrt{2}$.