

EXAMEN DE SEPTIEMBRE (06/09/2004)
PRIMER PARCIAL

SOLUCIONES

Problema 1.

a) Halla el dominio y estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \frac{(x-1) \ln|x-1|}{(x+1)\sqrt{x}} \cos x^2$$

b) Determina sus asíntotas.

Solución:

a) Un punto $x \in \mathbb{R}$ pertenece al dominio de f siempre que $|x-1| \neq 0$, $x+1 \neq 0$ y $x > 0$, es decir, siempre que $x > 0$ y $x \neq 1$, de donde se deduce que el dominio es:

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

La función es continua en su dominio, siendo $x = 1$ su único punto de discontinuidad. Puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln|x-1|}{(x+1)\sqrt{x}} \cos x^2 = \frac{\cos 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln|x-1| = \frac{\cos 1}{2} (0 \cdot \infty) = \\ &= \frac{\cos 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|x-1|}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\cos 1}{2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{H}{=} \frac{\cos 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \frac{\cos 1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0 \end{aligned}$$

la discontinuidad en $x = 1$ es evitable.

b) Al ser evitable la discontinuidad en $x = 1$, no presenta asíntota vertical en dicho punto y sólo hay que estudiar los extremos del dominio. En $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1) \ln|x-1|}{(x+1)\sqrt{x}} \cos x^2 = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x-1|}{\sqrt{x}} = - \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, no hay asíntota vertical por la derecha en $x = 0$. En el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1) \ln|x-1|}{(x+1)\sqrt{x}} \cos x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{\ln|x-1|}{\sqrt{x}} \cdot \cos x^2$$

y por ser:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x-1|}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = 0$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{\ln|x-1|}{\sqrt{x}} \cdot \cos x^2 = (1 \cdot 0 \cdot \text{acotada}) = 0$$

y, por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

Problema 2.

a) Dibuja la elipse de ecuación: $4x^2 + y^2 = 4$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto del primer cuadrante de abscisa $x = \alpha$.

c) La tangente anterior determina con los ejes (en el primer cuadrante) un segmento cuya longitud depende de α . ¿Cuál es su valor?

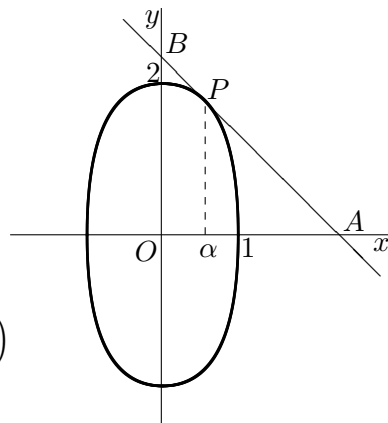
d) Halla el punto de la elipse cuya tangente determina un segmento de longitud mínima. ¿Cuál es la longitud mínima?

Solución:

a) Se obtiene la ecuación normal de la elipse:

$$4x^2 + y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

que corresponde a la elipse centrada en el origen, con semiejes $a = 1$ y $b = 2$, que se observa en la figura:



b) El punto P del primer cuadrante de abscisa $x = \alpha$ es:

$$x = \alpha \implies y = \pm\sqrt{4 - 4\alpha^2} = \pm 2\sqrt{1 - \alpha^2} \implies P(\alpha, 2\sqrt{1 - \alpha^2})$$

y la pendiente de la elipse en P es:

$$4x^2 + y^2 = 4 \implies 8x + 2yy' = 0 \implies y' = \frac{-4x}{y} \implies y'(P) = \frac{-4\alpha}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{-2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

La ecuación de la recta tangente a la elipse en P es:

$$y - 2\sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}(x - \alpha)$$

c) La anterior recta tangente determina en el primer cuadrante un segmento cuyos extremos son los puntos A y B de corte con los ejes:

$$y = 0 \implies 0 - 2\sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}(x - \alpha) \implies x = \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \implies A\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)$$

$$x = 0 \implies y = 2\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{-2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}(0 - \alpha) = \frac{2(1 - \alpha^2) + 2\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \implies B\left(0, \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right)$$

La longitud de este segmento es:

$$\ell(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{1 - \alpha^2}} = \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{1 - \alpha^2}\right)^{1/2}$$

d) La longitud mínima de este segmento corresponde al mínimo absoluto de la función longitud $\ell(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. Se hallan sus puntos críticos en el intervalo de definición:

$$\ell'(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{1 - \alpha^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{-2}{\alpha^3} + \frac{8\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}\right) = \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{1 - \alpha^2}\right)^{-1/2} \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1}{\alpha^3(1 - \alpha^2)^2} = 0$$

$$\iff 3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1 = 0 \iff \alpha^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \text{ (sin soluciones reales)} \end{cases}$$

Puesto que el punto crítico es único y la longitud tiende a infinito en los extremos del intervalo de definición, dicho punto crítico corresponde a un mínimo relativo que también es absoluto. Por tanto, el punto de la elipse cuya tangente determina un segmento de longitud mínima es:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies 2\sqrt{1-\alpha^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \implies P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

y la longitud mínima es:

$$\ell\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{1/3} + \frac{4}{1-1/3}} = \sqrt{3+6} = 3$$

Problema 3.

a) Sea $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable. Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

b) Usando lo anterior, halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1) \arctan \sqrt{x+1} - x \arctan \sqrt{x}]$$

Solución:

a) Si $x > a$ la función f es continua y derivable en el intervalo $[x, x+1]$ y, aplicando el teorema de valor medio en dicho intervalo, existe $\alpha \in (x, x+1)$ tal que:

$$f(x+1) - f(x) = f'(\alpha)((x+1) - x) = f'(\alpha)$$

Si $x \rightarrow +\infty$ entonces $\alpha \rightarrow +\infty$ y, renombrando la variable a la que se halla el límite, se obtiene el resultado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

b) La función $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$ es continua y derivable en $(0, +\infty)$ con derivada:

$$f'(x) = \arctan \sqrt{x} + x \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

Aplicando la fórmula obtenida en a):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1) \arctan \sqrt{x+1} - x \arctan \sqrt{x}] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Problema 4.

Se considera la función: $f(x) = \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}$

- a) Haz un esbozo de su gráfica calculando los extremos relativos.
 b) Halla una primitiva de f .
 c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Solución:

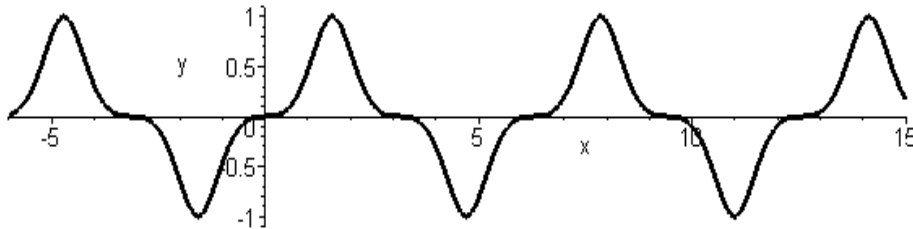
a) La función f es periódica de periodo 2π , por lo que sólo hay que representarla en el intervalo $[0, 2\pi]$ y extenderla periódicamente. Es siempre continua siendo positiva en $(0, \pi)$, negativa en $(\pi, 2\pi)$ y nula en $x = 0, \pi, 2\pi$, que son los puntos de corte de su gráfica con el eje de abscisas. Los puntos críticos son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 \sin^2 x \cos x \cdot (1 + \cos^2 x) - \sin^3 x \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{\sin^2 x \cos x (3 + 3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 x \cos x (5 + \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \iff x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

En los puntos críticos donde se anula el seno la derivada no cambia de signo, mientras que donde se anula el coseno sí cambia de signo. Teniendo en cuenta esto, se halla el signo de la derivada:

$$\begin{cases} f' > 0 \text{ en } (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \\ f' < 0 \text{ en } (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ es creciente en } (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \\ f \text{ es decreciente en } (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

de donde se deduce que alcanza un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{2}$ con $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, y un mínimo relativo en $x = \frac{3\pi}{2}$ con $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$. La representación gráfica de esta función se puede ver en la figura:



b) Puesto que la función es impar respecto del seno, haciendo el cambio de variable $t = \cos x$ se hallan todas sus primitivas:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx &= \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right) = \int \frac{(1 - t^2)(-dt)}{1 + t^2} = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1} \right) dt = t - 2 \arctan t + c = \cos x - 2 \arctan(\cos x) + c \end{aligned}$$

c) Puesto que f es positiva en $(0, \pi)$ y negativa en $(\pi, 2\pi)$, y teniendo en cuenta la primitiva calculada en el apartado anterior, el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-\frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} \right) dx = \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = \\ &= [\cos x - 2 \arctan(\cos x)]_{x=0}^{x=\pi} - [\cos x - 2 \arctan(\cos x)]_{x=\pi}^{x=2\pi} = \left[\left(-1 - 2 \frac{-\pi}{4} \right) - \left(1 - 2 \frac{\pi}{4} \right) \right] - \\ &- \left[\left(1 - 2 \frac{\pi}{4} \right) - \left(-1 - 2 \frac{-\pi}{4} \right) \right] = (\pi - 2) - (2 - \pi) = 2(\pi - 2) \end{aligned}$$