

EXAMEN DE SEPTIEMBRE (06/09/2004)  
PRIMER PARCIAL

**Problema 1. (2 puntos)**

a) Halla el dominio y estudia la continuidad (clasificando sus puntos de discontinuidad) de la función:

$$f(x) = \frac{(x-1) \ln|x-1|}{(x+1)\sqrt{x}} \cos x^2$$

b) Determina sus asíntotas.

**Problema 2. (3 puntos)**

a) Dibuja la elipse de ecuación:  $4x^2 + y^2 = 4$ .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto del primer cuadrante de abscisa  $x = \alpha$ .

c) La tangente anterior determina con los ejes (en el primer cuadrante) un segmento cuya longitud depende de  $\alpha$ . ¿Cuál es su valor?

d) Halla el punto de la elipse cuya tangente determina un segmento de longitud mínima. ¿Cuál es la longitud mínima?

**Problema 3. (2 puntos)**

a) Sea  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y derivable. Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

b) Usando lo anterior, halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1) \arctan \sqrt{x+1} - x \arctan \sqrt{x}]$$

**Problema 4. (3 puntos)**

Se considera la función:  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}$

a) Haz un esbozo de su gráfica calculando los extremos relativos.

b) Halla una primitiva de  $f$ .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y el eje de abscisas entre  $x = 0$  y  $x = 2\pi$ .