

EXAMEN FINAL DE JUNIO (17/06/2004)
PRIMER PARCIAL

SOLUCIONES

Problema 1.

- a) Halla todos los números complejos z que verifican: $z^4 - 8|z| = 0$.
b) Halla el dominio y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \ln(x + x^3)}{x + 1}$$

Solución:

- a) Si $z = re^{i\theta}$ entonces $|z| = r$ y, sustituyendo en la ecuación, se obtiene:

$$z^4 - 8|z| = r^4 e^{i4\theta} - 8r = r(r^3 e^{i4\theta} - 8) = 0 \iff \begin{cases} r = 0 \\ \text{ó} \\ r^3 e^{i4\theta} = 8 \iff \begin{cases} r^3 = 8 \iff r = 2 \\ 4\theta = 2k\pi \iff \theta = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, los números complejos que verifican la ecuación son:

$$z = 0 \quad z = 2e^{i0} = 2 \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \quad z = 2e^{i\pi} = -2 \quad z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

- b) El dominio de la función es:

$$\begin{cases} x^2 + 2x = x(x + 2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) \\ x + x^3 = x(1 + x^2) > 0 \iff x > 0 \iff x \in (0, +\infty) \implies D = (0, +\infty) \\ x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1 \end{cases}$$

Para hallar las asíntotas se calcula los límites de la función en los extremos del dominio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \ln(x + x^3)}{x + 1} = \frac{0 + (-\infty)}{1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \ln(x + x^3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + x^3)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + x^3)}{x + 1} = 1 + \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{H}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^2}{x + x^3} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^2}{x + x^3} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha, e $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

Problema 2.

Estudia la continuidad y derivación en el origen de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} & , \text{ si } x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Solución: Para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cos \frac{1}{x} = (0 \cdot \text{acotada}) = 0 \end{aligned}$$

y puesto que existen y coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \implies f \text{ es continua en } x = 0$$

Para estudiar la derivación se hallan las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6} \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \frac{1}{x} = (0 \cdot \text{acotada}) = 0 \end{aligned}$$

y, puesto que las derivadas laterales no coinciden, f no es derivable en $x = 0$.

Problema 3.

Halla el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $x = 0$, y úsalo para hallar un valor aproximado de $\sqrt{1,02}$ estimando el error cometido.

Solución: Se halla hasta la derivada tercera de la función en el origen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{1/2} \implies f(0) = 1 & f''(x) &= -(2x+1)^{-3/2} \implies f''(0) = -1 \\ f'(x) &= (2x+1)^{-1/2} \implies f'(0) = 1 & f'''(x) &= 3(2x+1)^{-5/2} \implies f'''(0) = 3 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$ es:

$$P_3^{x=0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{6}x^3 = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Un valor aproximado de $\sqrt{1,02}$ es:

$$\sqrt{1,02} = f(0,01) \simeq P_3^{x=0}(0,01) = 1 + 0,01 - \frac{0,01^2}{2} + \frac{0,01^3}{2} = 1,0099505$$

Para calcular el error, se halla el término complementario correspondiente al polinomio de Taylor de grado 3:

$$\begin{aligned} f''''(x) &= -15(2x+1)^{-7/2} \\ T_3^{x=0}(x) &= \frac{f''''(\alpha)}{4!}(x-0)^4 = \frac{-15(2\alpha+1)^{-7/2}}{24}x^4 = \frac{-5x^4}{8(2\alpha+1)^{7/2}} \quad \text{con } \alpha \text{ entre } 0 \text{ y } x \end{aligned}$$

Acotando este término complementario en valor absoluto, en $x = 0,01$, se obtiene una cota del error cometido en la anterior aproximación:

$$\text{Error} = |T_3^{x=0}(0,01)| = \frac{5 \cdot 0,01^4}{8(2\alpha + 1)^{7/2}} \text{ con } 0 < \alpha < 0,01 \implies \text{Error} \leq \frac{5 \cdot 0,01^4}{8} = 0,625 \cdot 10^{-8}$$

Problema 4.

a) *Enuncia el teorema fundamental de Cálculo, y úsalo para hallar la derivada de la función $F : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) = \int_0^{1-x} te^{-t} dt$$

b) *Halla los extremos relativos y absolutos de la función F definida en a).*

Solución:

a) Para el enunciado del teorema fundamental del cálculo, consultar teoría. Usando este teorema, la derivada de la función F es:

$$F(x) = \int_0^{1-x} te^{-t} dt \implies F'(x) = (1-x)e^{-(1-x)}(1-x)' = (x-1)e^{x-1}$$

b) La función F alcanza extremos absolutos por ser continua y estar definida en el intervalo compacto $[0, 2]$. Los extremos relativos de F y el signo de su derivada, en su campo de definición, son:

$$F'(x) = (x-1)e^{x-1} \begin{cases} < 0, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ = 0, \text{ si } x = 1 \\ > 0, \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \implies \begin{cases} F \text{ es decreciente en } [0, 1) \\ F \text{ tiene un mínimo relativo en } x = 1 \\ F \text{ es creciente en } (1, 2] \end{cases}$$

Puesto que el mínimo relativo es el único extremo en su intervalo de definición, la función alcanza también en $x = 1$ el mínimo absoluto, cuyo valor es:

$$F(1) = \int_0^0 te^{-t} dt = 0$$

No tiene máximos relativos y el absoluto lo alcanza en uno de sus extremos:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^1 te^{-t} dt = \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right) = [-te^{-t}]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 e^{-t} dt = \\ &= -e^{-1} + 0 - [e^{-t}]_{t=0}^{t=1} = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} \\ F(2) &= \int_0^{-1} te^{-t} dt = \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right) = [-te^{-t}]_{t=0}^{t=-1} + \int_0^{-1} e^{-t} dt = \\ &= e^1 + 0 - [e^{-t}]_{t=0}^{t=-1} = e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo absoluto lo alcanza en $x = 2$ y su valor es $F(2) = 1$.

Problema 5.

Haz un esbozo de la gráfica de la función

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

y halla el área del recinto del primer cuadrante comprendido entre dicha gráfica y el eje de abscisas.

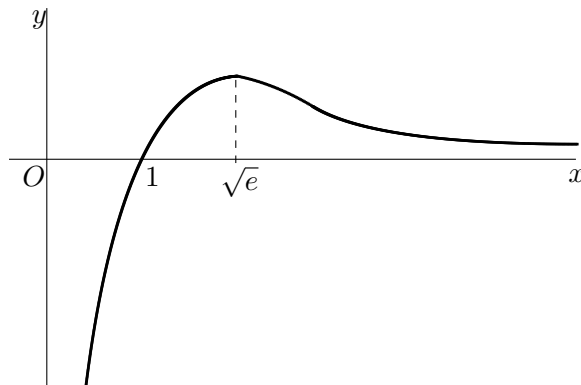
Solución: El dominio de la función $y = \frac{\ln x}{x^2}$ es $D = (0, +\infty)$ siendo negativa cuando $0 < x < 1$, cero en $x = 1$, y positiva cuando $x > 1$. El límite de la función en los extremos del dominio es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

de donde se deduce que $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha, e $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. Su crecimiento y extremos relativos se obtiene a partir de la derivada:

$$y' = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \begin{cases} > 0, \text{ si } 0 < x < \sqrt{e} \\ = 0, \text{ si } x = \sqrt{e} \\ < 0, \text{ si } \sqrt{e} < x < +\infty \end{cases} \implies \begin{cases} F \text{ es creciente en } (0, \sqrt{e}) \\ F \text{ tiene un máximo relativo en } x = \sqrt{e} \\ F \text{ es decreciente en } (\sqrt{e}, +\infty) \end{cases}$$

Un esbozo de su gráfica se puede ver en la siguiente figura:



El recinto del primer cuadrante comprendido entre la gráfica y el eje de abscisas es un recinto no acotado. Su área viene dada por la siguiente integral impropia:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Para hallar esta integral se calcula en primer lugar la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{array} \right) = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-(1 + \ln x)}{x}$$

y entonces el área es:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{-(1 + \ln x)}{x} \right]_{x=1}^{x=R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{-(1 + \ln R)}{R} + 1 \right) = \\ &= 1 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln R}{R} = 1 - \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{H}{=} 1 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1/R}{1} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$