FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM)
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA

CURSO 2003/2004
CÁLCULO INFINITESIMAL
Grupo 13M

PRIMER PARCIAL DE FEBRERO (27/01/2004)

SOLUCIONES

Problema 1.
a) *Resuelve la ecuación* $z^3 = 8i$ *y escribe sus soluciones en forma binómica.*
b) *Representa gráficamente las soluciones de la ecuación anterior, y estudia cuáles pertenecen al conjunto* $\{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1\}$.

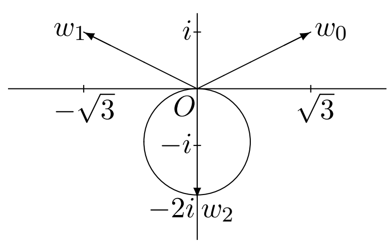
Solución:
a) Se despeja z en la ecuación:

$$z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi+4k\pi}{6}}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} k=0 \implies w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i \\ k=1 \implies w_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i \\ k=2 \implies w_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \end{cases}$$

b) El conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1\}$ es el exterior del círculo $|z+i| = 1$ con centro en $-i = (0,-1)$ y radio 1. Las raíces y el círculo aparecen representados en la siguiente figura:



Como se observa en la figura, las únicas raíces que pertenecen al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1\}$, es decir, que son exteriores al círculo, son w_0 y w_1, pues w_2 pertenece al círculo.

Problema 2.
Calcula el dominio y las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{2-\sqrt{|x|}} - \ln\left(\dfrac{8}{x} - 1\right)$.

Solución: Un punto $x \in \mathbb{R}$ pertenece al dominio de la función si:

$$\left.\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \iff |x| \geq 4 \iff x \in (-\infty,-4] \cup [4,+\infty) \\ 2 - \sqrt{|x|} \neq 0 \iff |x| \neq 4 \iff x \neq \pm 4 \\ \frac{8}{x} - 1 > 0 \iff \frac{8-x}{x} > 0 \iff x(8-x) > 0 \iff x \in (0,8) \end{cases}\right. \iff x \in (4,8)$$

Por tanto, el dominio es $D = (4,8)$. Puesto que la función es continua en el dominio y éste es acotado, las únicas posibles asíntotas son verticales en $x = 4$, por la derecha, y en $x = 8$, por la izquierda. Se hallan los límites de la función es estos puntos:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{2-\sqrt{|x|}} - \ln\left(\frac{8}{x}-1\right)\right) = \lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x^2-16}}{2-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 4^+}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-16}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 4^+}\frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-16}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{2-\sqrt{|x|}} - \ln\left(\frac{8}{x}-1\right)\right) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{2-2\sqrt{2}} - (-\infty)\right) = +\infty$$

Por tanto, $x = 4$ es asíntota vertical por la derecha y $x = 8$ es asíntota vertical por la izquierda.

Problema 3.
Sea $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0,2]$, derivable con derivada positiva en $(0,2)$, y verificando que $g(1) = 0$.
a) *Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para probar que la ecuación $e^x - e^{-x} + g\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ tiene solución en el intervalo $(0,2)$.*
b) *Enuncia el teorema de Rolle y utilízalo para probar que la solución de la ecuación anterior en $(0,2)$ es única.*

Solución:
Teorema de Bolzano: Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua verificando que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.
Teorema de Rolle: Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) verificando que $f(a) = f(b)$, entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.
a) Se considera la función

$$f(x) = e^x - e^{-x} + g\left(\frac{x}{2}\right)$$

que es continua en $[0,2]$. Puesto que la derivada de g es positiva en $(0,2)$, la función g es estrictamente creciente y, al ser $g(1) = 0$, se cumple que $g(0) < 0$ y $g(2) > 0$. Por tanto:

$$\begin{cases} f(0) = e^0 - e^{-0} + g(0) = g(0) < 0 \\ f(2) = e^2 - e^{-2} + g(1) = e^2 - e^{-2} > 0 \end{cases} \implies f(0)f(2) < 0$$

Entonces, aplicando el teorema de Bolzano a la función f, existe $\alpha \in (0,2)$ tal que:

$$f(\alpha) = e^\alpha - e^{-\alpha} + g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

y, por tanto, $x = \alpha \in (0,2)$ es una raíz de la ecuación.
b) Puesto que la función g es derivable en $(0,2)$, la función f también lo es, y si la ecuación tuviera dos soluciones $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,2)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces:

$$\begin{cases} f \text{ continua en } [\alpha_1, \alpha_2] \\ f \text{ derivable en } (\alpha_1, \alpha_2) \\ f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0 \end{cases} \underset{Rolle}{\implies} \text{Existe } \beta \in (\alpha_1, \alpha_2) \subset (0,2) \text{ tal que } f'(\beta) = 0$$

lo que no puede ocurrir, pues:

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}g'\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ para todo } x \in (0,2)$$

y, por tanto, la solución es única.

Problema 4.
Se considera la función: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, $x \geq 0$.
a) *Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
b) *Encuentra sus extremos relativos y absolutos.*

Solución:
a) Se calcula la derivada y su signo en $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^4} - x \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x^4}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1-x^4}{(1+x^4)^{3/2}} \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

de donde se deduce que f es creciente en el intervalo $[0,1)$, y decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$.
b) Se hallan los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = \frac{1-x^4}{(1+x^4)^{3/2}} = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = 1$$

ya que ésta es la única raíz de la ecuación $x^4 = 1$ en el dominio de la función. A partir del crecimiento, se deduce que la función presenta un máximo relativo en $x = 1$, que también es absoluto al ser la función siempre creciente antes del punto y siempre decreciente después del punto. El valor del máximo absoluto es: $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Para hallar, si existe, el mínimo absoluto se estudia la función en los extremos del dominio:

$$f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

de donde se deduce que f alcanza el mínimo absoluto en $x = 0$, y su valor es: $f(0) = 0$.

Problema 5.
Se considera la función: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t+2}{t^2-4t+8}\,dt$.
a) *Calcula* $F'(x)$.
b) *Halla el polinomio de Taylor de* F *de grado* 2 *en* $x = 2$.

Solución:
a) La función integrando es siempre continua (al no anularse su denominador) y entonces, aplicando el teorema fundamental del Cálculo, la función F es siempre derivable, siendo:

$$F'(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+8}$$

b) El polinomio de Taylor de F de grado 2 en $x = 2$ es:

$$P_2^{x=2}(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}F''(2)(x-2)^2$$

donde:

$$F(2) = \int_0^2 \frac{t+2}{t^2-4t+8}\,dt = \int_0^2 \frac{t-2+4}{(t-2)^2+4}\,dt = \int_0^2 \left(\frac{t-2}{(t-2)^2+4} + \frac{1}{1+\left(\frac{t-2}{2}\right)^2} \right) dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln\left|(t-2)^2+4\right| + 2\arctan\frac{t-2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 8) + 2(\arctan 0 - \arctan(-1)) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + 2\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\pi - \ln 2}{2}$$

Además:

$$F'(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+8} \implies F'(2) = \frac{2+2}{4-8+8} = 1$$

$$F''(x) = \frac{1(x^2-4x+8)-(x+2)(2x-4)}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{-x^2-4x+16}{(x^2-4x+8)^2} \implies F''(2) = \frac{-4-8+16}{(4-8+8)^2} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo, el polinomio de Taylor de F de grado 2 en $x=2$ es:

$$P_2^{x=2}(x) = \frac{\pi - \ln 2}{2} + (x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2$$

Problema 6.

Se considera la función: $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

a) *Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de ordenadas y abscisas.*

b) *Halla el volumen de revolución obtenido al girar la gráfica de f para $x \geq 1$ alrededor del eje de abscisas.*

Solución:

a) Puesto que $f(x) > 0$ para $x > 0$, el área del recinto limitado es:

$$A = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$$

que es una integral impropia al no estar acotado ni el recinto de integración ni la función. Por tanto, el área limitada es:

$$A = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx = 2 \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}\, dx =$$

$$= 2 \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \left[\arctan\sqrt{x}\right]_{x=\varepsilon}^{x=R} = 2 \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \left(\arctan\sqrt{R} - \arctan\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$

b) El volumen de revolución es:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2} = \pi \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x(1+x)^2}$$

La integral indefinida se halla a partir de la descomposición en fracciones simples del integrando:

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

cuya solución es $a=1$ y $b=c=-1$, de donde:

$$\int \frac{dx}{x(1+x)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = \ln|x| - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + c =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + \frac{1}{1+x} + c$$

Por tanto, el volumen de revolución es:

$$V = \pi \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + \frac{1}{1+x}\right]_{x=1}^{x=R} = \pi \lim_{R\to\infty} \left(\ln\frac{R}{1+R} + \frac{1}{1+R} - \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{(2\ln 2 - 1)\pi}{2}$$