FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM) **CURSO 2002/2003**
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA **CÁLCULO INFINITESIMAL**
Grupo 17T

EXAMEN DE SEPTIEMBRE (06/09/2003)

SOLUCIONES

Problema 1. *Calcula el dominio y las asíntotas de la función:*

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Solución: Un punto $x \in \mathbb{R}$ pertenece al dominio de f si $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $1 - \frac{1}{x} > 0$, siendo:

$$1 - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0 \iff x < 0 \text{ o } x > 1$$

Por tanto, el dominio de f es $D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Para hallar las asíntotas verticales hay que hallar el límite por la izquierda en $x = 0$ y por la derecha en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x-1} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = ((+\infty)\cdot(-\infty)) = -\infty$$

de donde se deduce que la recta $x = 1$ es asíntota vertical por la derecha, y que no hay asíntota vertical en $x = 0$. Los límites de la función en el infinito son:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

y, por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. No hay asíntotas oblicuas.

Problema 2.

i) *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y úsalo para hallar la derivada de*

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \frac{t^2-2}{t^2+2t+2}\,dt$$

ii) *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = -1$.*

Solución: **i)** Para el enunciado del teorema fundamental del cálculo, consultar los apuntes de la asignatura o cualquier referencia bibliográfica.
La función integrando, $y = \frac{x^2-2}{x^2+2x+2}$, es continua en toda la recta real (su denominador no se anula), y la función que define el límite superior de la integral, $y = x^2 - 1$, es siempre derivable. Por tanto,

usando el teorema fundamental del cálculo, la función F es derivable en toda la recta real, y su derivada es:

$$F'(x) = \frac{(x^2-1)^2-2}{(x^2-1)^2+2(x^2-1)+2} \cdot (x^2-1)' = \frac{2x(x^4-2x^2-1)}{x^4+1}$$

ii) La ecuación de la recta tangente a F en $x=-1$ es:

$$y - F(-1) = F'(-1)(x+1)$$

donde, sustituyendo en la expresión de la derivada obtenida en i):

$$F'(-1) = \frac{2(-1)(1-2-1)}{1+1} = 2$$

e integrando:

$$\begin{aligned} F(-1) &= \int_{-2}^{0} \frac{t^2-2}{t^2+2t+2}\,dt = \int_{-2}^{0}\left(1+\frac{-2t-4}{t^2+2t+2}\right)dt \\ &= \int_{-2}^{0}\left(1-\frac{2(t+1)}{(t+1)^2+1}-\frac{2}{(t+1)^2+1}\right)dt = \big[t-\ln[(t+1)^2+1]-2\arctan(t+1)\big]_{t=-2}^{t=0} \\ &= (0-\ln 2-2\arctan 1)-(-2-\ln 2-2\arctan(-1)) = 2-\pi \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a F en $x=-1$ es:

$$y-(2-\pi) = 2(x+1) \implies y = 2x+4-\pi$$

Problema 3. *Encuentra los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & si\ x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & si\ x > 0 \end{cases}$$

cumpla las dos condiciones siguientes:

i) *La función f es derivable en $\mathbb{R}$.*

ii) *El área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje negativo de abscisas es cuatro veces el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje positivo de abscisas.*

Solución: La función f es derivable en $\mathbb{R}$ si lo es en $x=0$, para lo que necesita, en primer lugar, que sea continua en dicho punto y, por tanto, que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}[-x(x+2)] = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+c) = c \end{cases} \overset{f \text{ continua}}{\Longrightarrow} c = 0 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si } x \leq 0 \\ (ax+b)x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

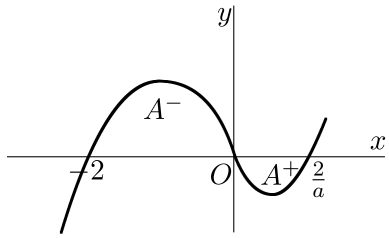
Puesto que las funciones que definen f son derivables en $x=0$, sus derivadas laterales son:

$f'(0^-) = [-x(x+2)]'|_{x=0} = (-2x-2)|_{x=0} = -2 \qquad f'(0^+) = [(ax+b)x]'|_{x=0} = (2ax+b)|_{x=0} = b$

y, por tanto, para que f sea derivable en $x=0$ es necesario que $b=-2$, en cuyo caso:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si } x \leq 0 \\ (ax-2)x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función $y=-x(x+2)$ es una parábola con curvatura hacia abajo que corta al eje de abscisas en los puntos $x=-2$ y $x=0$, y la de la función $y=(ax-2)x$, $a>0$, es una parábola con curvatura hacia arriba que corta al eje de abscisas en los puntos $x=0$ y $x=\frac{2}{a}>0$, por tanto, la gráfica de la función f es la siguiente:



El área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje negativo de abscisas es:

$$A^- = \int_{-2}^{0} -x(x+2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{x=-2}^{x=0} = 0 - \left(-\frac{-8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

y el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje positivo de abscisas es:

$$A^+ = -\int_{0}^{2/a} (ax-2)x\,dx = -\left[\frac{ax^3}{3} - x^2\right]_{x=0}^{x=2/a} = -\left(\frac{a\cdot\frac{8}{a^3}}{3} - \frac{4}{a^2}\right) + 0 = \frac{4}{3a^2}$$

Si el área A^- es cuatro veces el área A^+, entonces:

$$A^- = 4A^+ \iff \frac{4}{3} = 4\frac{4}{3a^2} \iff a^2 = 4 \overset{a>0}{\iff} a = 2$$

En resumen, la función f cumple las condiciones pedidas si $a = 2$, $b = -2$ y $c = 0$.

Problema 4.

a) *Calcula el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2\ln n}}$$

b) i) *Obtén el campo de convergencia de la serie:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$.

ii) *Sabiendo que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, *obtén el desarrollo en serie de potencias de* $f(x) = xe^x$.

iii) *Suma la serie:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$.

Solución: a) Al hallar el límite se presenta una indeterminación del tipo 0^0. Usando logaritmos, si $\ell = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2\ln n}}$, entonces:

$$\ln \ell = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-2\ln n}\ln\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{1-2\ln n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{\ln n}-2} = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2\ln n}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

b-i) Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n!}{(n+1)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)^2} = 0$$

el radio de convergencia de la serie es infinito y el intervalo de convergencia es toda la recta real.

b-ii) Si $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces:

$$f(x) = xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

es el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = xe^x$.
b-iii) El campo de convergencia de la serie de f es toda la recta real y, por tanto, derivando dicha serie:

$$f'(x) = (x+1)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

y sustituyendo $x = 1$, se obtiene:

$$f'(1) = 2e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} = 2e$$

Otra forma de obtener la suma de esta serie, sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, es la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

Problema 5. *Sean f, con dominio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$, y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones:*

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2(y-2)}{x^2+y^2-2x-4y+5} \qquad\qquad g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(f) \\ k & \text{si } (x,y) \notin D(f) \end{cases}$$

i) *Determina el valor de k para que g sea continua en $\mathbb{R}^2$, y para este valor:*

ii) *Estudia la diferenciabilidad de g en $\mathbb{R}^2$.*

iii) *Calcula la derivada direccional de g en $(1,2)$ según el vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$.*

Solución: i) Puesto que

$$x^2+y^2-2x-4y+5 = (x-1)^2+(y-2)^2 = 0 \iff (x,y) = (1,2)$$

el dominio de la función f es $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$. La función f es continua en su dominio y, por tanto, la función g es continua en $\mathbb{R}^2$ si lo es en el punto $(1,2)$, para lo que se necesita que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2(y-2)}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = k$$

Pasando a coordenadas polares generalizadas ($x = 1+\rho\cos\theta$, $y = 2+\rho\operatorname{sen}\theta$), este límite es:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

ya que $\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$ está acotado en $[0,2\pi]$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y) = 0$$

y la función g es continua en $\mathbb{R}^2$ si $k = 0$.

ii) La función g es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$, y en el punto $(1,2)$ hay que estudiarla. Las derivadas parciales en dicho punto son:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x,2)-g(1,2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{0-0}{x-1} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = \lim_{y\to 2} \frac{g(1,y)-g(1,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{0-0}{y-2} = 0$$

y entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{g(x,y)-g(1,2)-\frac{\partial g}{\partial x}(1,2)(x-1)-\frac{\partial g}{\partial y}(1,2)(y-2)}{\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^{1/2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{g(x,y)}{\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2(y-2)}{\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^{3/2}}$$

Pasando a coordenadas polares generalizadas ($x = 1+\rho\cos\theta$, $y = 2+\rho\operatorname{sen}\theta$), este límite es:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$$

Puesto que este límite depende de θ, el límite doble en $(1,2)$ no existe y la función g no es diferenciable en $(1,2)$.
iii) La derivada direccional de g en $(1,2)$ según el vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$, que tiene la dirección del vector unitario $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, es:

$$D_{\overrightarrow{v}}g(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{g\left((1,2)+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-g(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2}\frac{t}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right)t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Problema 6. *Sea $f(x,y) = 4x^2e^y - ax^4 - be^{4y}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

i) *Determina los valores de a y b para los que $(1,0)$ es un punto crítico de f.*

ii) *Para los valores de a y b encontrados en i), halla todos los extremos relativos de f.*

Solución: i) Las derivadas parciales de la función f son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 4ax^3 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4be^{4y}$$

El punto $(1,0)$ es un punto crítico de f si sus derivadas parciales se anulan en dicho punto, para lo que se necesita que:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 8-4a = 4(2-a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4-4b = 4(1-b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

ii) Para $a = 2$ y $b = 1$ las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 8x^3 = 8x\left(e^y - x^2\right) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4e^{4y} = 4e^y\left(x^2 - e^{3y}\right)$$

Los puntos críticos son aquellos que anulan a las derivadas parciales, es decir, son las soluciones del sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} x\left(e^y - x^2\right) = 0 \\ e^y\left(x^2 - e^{3y}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(e^y - x^2\right) = 0 \\ x^2 - e^{3y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y - x^2 = 0 \\ x^2 - e^{3y} = 0 \end{cases}$$

ya que si $x = 0$ en la primera ecuación, la segunda ecuación del sistema no se verificaría. Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} e^y - x^2 = 0 \\ x^2 - e^{3y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = e^y \\ e^y - e^{3y} = e^y(1 - e^{2y}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = e^y \\ e^{2y} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

de donde $x = \pm 1$ y, por tanto, los puntos críticos son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Se halla la matriz hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^y - 24x^2 & 8xe^y \\ 8xe^y & 4x^2e^y - 16e^{4y} \end{pmatrix}$$

y se evalúan su determinante y la derivada segunda respecto de x en los puntos críticos:

$$\begin{cases} |Hf(1, 0)| = 128 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -16 < 0 \end{cases} \implies f \text{ alcanza un máximo relativo en } (1, 0)$$

$$\begin{cases} |Hf(-1, 0)| = 128 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = -16 < 0 \end{cases} \implies f \text{ alcanza un máximo relativo en } (-1, 0)$$