

EXAMEN DE SEPTIEMBRE (06/09/2003)

Problema 1. (1,5 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de la función:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Problema 2. (2 puntos)

i) Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y úsalo para hallar la derivada de

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \frac{t^2 - 2}{t^2 + 2t + 2} dt$$

ii) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = -1$.

Problema 3. (1,5 puntos) Encuentra los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

cumpla las dos condiciones siguientes:

- La función f es derivable en \mathbb{R} .
- El área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje negativo de abscisas es cuatro veces el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el semieje positivo de abscisas.

Problema 4. (2 puntos)

a) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2 \ln n}}$$

- Obtén el campo de convergencia de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$.
 - Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, obtén el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = xe^x$.
 - Suma la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

Problema 5. (1,5 puntos) Sean f , con dominio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$, y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones:

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^2(y-2)}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} \quad g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D(f) \\ k & \text{si } (x, y) \notin D(f) \end{cases}$$

- Determina el valor de k para que g sea continua en \mathbb{R}^2 , y para este valor:
- Estudia la diferenciabilidad de g en \mathbb{R}^2 .
- Calcula la derivada direccional de g en $(1, 2)$ según el vector $\vec{v} = (1, 1)$.

Problema 6. (1,5 puntos) Sea $f(x, y) = 4x^2e^y - ax^4 - be^{4y}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- Determina los valores de a y b para los que $(1, 0)$ es un punto crítico de f .
- Para los valores de a y b encontrados en i), halla todos los extremos relativos de f .