

PRIMER PARCIAL DE JUNIO (23/06/2003)

SOLUCIONES

Problema 1. Representa gráficamente la región del plano complejo dada por

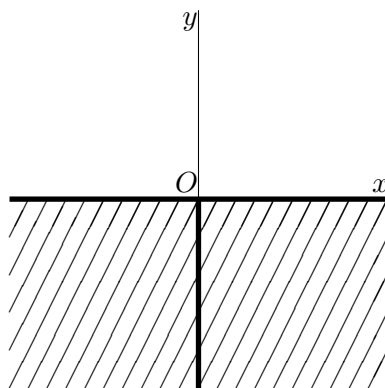
$$(z - \bar{z})i \geq 0$$

y calcula las soluciones de la ecuación $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$ que pertenecen a dicha región.

Solución: Si $z = x + yi$ entonces $\bar{z} = x - yi$ y $z - \bar{z} = 2yi$. Sustituyendo:

$$(z - \bar{z})i = 2yi^2 = -2y \geq 0 \iff y \leq 0$$

que corresponde a los cuadrantes tercero y cuarto, incluyendo el eje de abscisas y el semieje negativo de ordenadas:



Las soluciones de la ecuación son:

$$z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i \iff z = \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{4e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \sqrt[4]{4}e^{\frac{2\pi + 2k\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{\frac{(1+3k)\pi}{6}i} \iff$$

$$\iff \begin{cases} z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i} & \text{si } k = 0 \\ z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i} & \text{si } k = 1 \\ z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i} & \text{si } k = 2 \\ z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{3}i} & \text{si } k = 3 \end{cases}$$

de las que sólo z_2 y z_3 pertenecen a la región.

Problema 2. Enuncia el teorema de Bolzano, y demuestra que la ecuación

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 + \cos x$$

admite alguna solución $x = \alpha$ con $-1 < \alpha < 3$.

Solución:

Enunciado del teorema de Bolzano: Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que toma valores

de signo contrario en sus extremos, es decir, que verifica $f(a)f(b) < 0$, entonces se anula en un punto intermedio, es decir, existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se considera la función $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} - 2 - \cos x$$

que es continua y que toma valores de signo contrario en los extremos de su intervalo de definición:

$$f(-1) = 0 - 2 - \cos(-1) = -2 - \cos 1 < 0 \quad f(3) = \sqrt[3]{8} - 2 - \cos 3 = -\cos 3 > 0$$

ya que $x = 1$ es un ángulo del primer cuadrante (con coseno positivo) y $x = 3$ es un ángulo del segundo cuadrante (con coseno negativo). Puesto que se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha^2 - 1} - 2 - \cos \alpha = 0$, es decir, verificando:

$$\sqrt[3]{\alpha^2 - 1} = 2 + \cos \alpha$$

y, por tanto, es solución de la ecuación.

Problema 3. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_0^{x^3} \ln \frac{1 + e^t}{2} dt$$

a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula el valor del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^6}$$

Solución: a) Puesto que la función integrando es continua en \mathbb{R} y el límite superior de la integral es derivable, se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para hallar la derivada:

$$F'(x) = \ln \frac{1 + e^{x^3}}{2} \cdot 3x^2 = 3x^2 \ln \frac{1 + e^{x^3}}{2}$$

que sólo se anula en $x = 0$ y cuando $e^{x^3} = 1$, que ocurre también en $x = 0$. Además:

$$x < 0 \implies e^{x^3} < 1 \implies \frac{1 + e^{x^3}}{2} < 1 \implies F'(x) < 0$$

$$x > 0 \implies e^{x^3} > 1 \implies \frac{1 + e^{x^3}}{2} > 1 \implies F'(x) > 0$$

y, por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

b) Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^6} &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \ln \frac{1 + e^{x^3}}{2}}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1 + e^{x^3}}{2}}{2x^3} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2 e^{x^3}}{1 + e^{x^3}}}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}}{2(1 + e^{x^3})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Problema 4. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}(x-2) \sin \frac{\pi}{x^2 - 5x + 6}$$

a) Determina el dominio D de f .

b) Estudia la continuidad (analizando sus discontinuidades) de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

Solución: a) Puesto que el exponente de la función exponencial no está definido en $x = 1$, y el denominador del ángulo, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, se anula en $x = 2$ y $x = 3$, el dominio de la función f es:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

b) Puesto que la función f es continua en su dominio D , la función g es también continua en D . Las únicas posibles discontinuidades de g son los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$, que se estudian a continuación.

En $x = 1$ se hallan los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}(x-2) \sin \frac{\pi}{(x-2)(x-3)} = \left(0 \cdot (-1) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 \cdot (-1) \cdot 1\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}(x-2) \sin \frac{\pi}{(x-2)(x-3)} = \left(+\infty \cdot (-1) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = +\infty \cdot (-1) \cdot 1\right) = -\infty \end{aligned}$$

y, por tanto, g tiene una discontinuidad esencial en $x = 1$. Más concretamente, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0 = g(1)$$

la función es continua por la izquierda de $x = 1$, mientras que por la derecha presenta una discontinuidad esencial.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-1}}(x-2) \sin \frac{\pi}{(x-2)(x-3)} = (e \cdot 0 \cdot \text{acotado} = 0 \cdot \text{acotado}) = 0 = g(2)$$

y, por tanto, g es continua en $x = 2$.

En $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{1}{x-1}}(x-2) \sin \frac{\pi}{(x-2)(x-3)} = e^{1/2} \lim_{x \rightarrow 3} \sin \frac{\pi}{x-3}$$

y este límite no existe (cuando $x \rightarrow 3$ la función seno oscila indefinidamente entre -1 y 1). Por tanto, g tiene una discontinuidad esencial en $x = 3$.

Resumiendo, la función g es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, con discontinuidad esencial en ambos puntos de discontinuidad.

Problema 5. Sea $f : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x - a)(x - 8)$, con $a \in (0, 8)$.

a) Razona si la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo) para todo valor de a .

b) Encuentra el valor de a para que uno de los extremos se alcance en $x = 6$.

c) Para el valor de a encontrado en b), estudia la concavidad de f y dibuja su gráfica.

Solución: a) La función f está definida en un intervalo compacto (cerrado y acotado) y es continua para cualquier valor de a . Entonces, aplicando el teorema de Weierstrass, la función alcanza sus extremos absolutos en dicho intervalo.

b) Puesto que la función es derivable, si alcanza alguno de sus extremos en $x = 6$, que es un punto interior del intervalo, su derivada se debe anular en dicho punto. La derivada de f es:

$$f(x) = x(x - a)(x - 8) = x^3 - (a + 8)x^2 + 8ax \implies f'(x) = 3x^2 - 2(a + 8)x + 8a$$

y si se anula en $x = 6$:

$$f'(6) = 108 - 12(a + 8) + 8a = 4(3 - a) = 0 \iff a = 3$$

c) Para $a = 3$, la función y sus dos primeras derivadas son:

$$f(x) = x(x - 3)(x - 8) = x^3 - 11x^2 + 24x \quad f'(x) = 3x^2 - 22x + 24 \quad f''(x) = 6x - 22 = 6 \left(x - \frac{11}{3} \right)$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta el dominio de definición, que:

$$\begin{cases} f''(x) < 0 \text{ si } x \in [0, \frac{11}{3}) \implies f \text{ es cóncava en } [0, \frac{11}{3}) \\ f''(x) > 0 \text{ si } x \in (\frac{11}{3}, 8] \implies f \text{ es convexa en } (\frac{11}{3}, 8] \end{cases}$$

y, por tanto, hay un punto de inflexión en $x = \frac{11}{3}$ donde $f(\frac{11}{3}) = \frac{-286}{27}$, es decir, en el punto $(\frac{11}{3}, \frac{-286}{27})$.

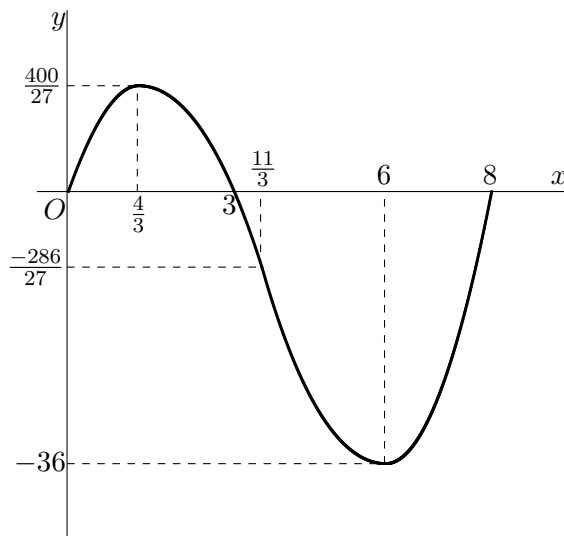
Los extremos relativos de la función se alcanzan en:

$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 24 = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 6 \end{cases}$$

y, puesto que $x = \frac{4}{3}$ está en el intervalo donde la función es cóncava y $x = 6$ en el intervalo donde la función es convexa:

- La función alcanza un máximo relativo y absoluto en $x = \frac{4}{3}$, que es $f(\frac{4}{3}) = \frac{400}{27}$.
- La función alcanza un mínimo relativo y absoluto en $x = 6$, que es $f(6) = -36$.

La representación gráfica aproximada de la función es:

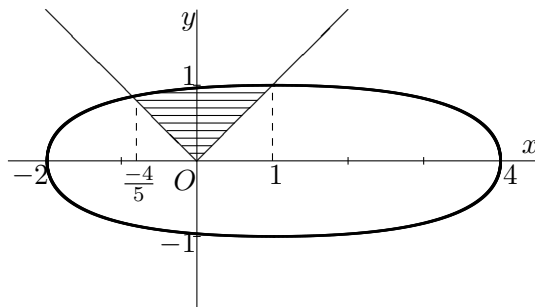


Problema 6. *Calcula el volumen de revolución engendrado al girar alrededor del eje x la región que contiene al punto $(0, \frac{1}{3})$ y que está limitada por las gráficas de $y = |x|$ y de la elipse $\frac{(x-1)^2}{3^2} + y^2 = 1$.*

Solución: Se hallan las abscisas de los puntos de intersección entre ambas gráficas:

$$\begin{cases} y = |x| \\ \frac{(x-1)^2}{3^2} + y^2 = 1 \end{cases} \implies (x-1)^2 + 9x^2 = 9 \implies 5x^2 - x - 4 = 0 \implies \begin{cases} x = \frac{-4}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

Se representan ambas curvas y se determina la región que gira, que es la que aparece en la figura:



El volumen de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje de abscisas es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4/5}^1 \left[\left(1 - \frac{(x-1)^2}{9} \right) - |x|^2 \right] dx = \pi \int_{-4/5}^1 \left(1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{9} - x^2 \right) dx = \\ &= \frac{2\pi}{9} \int_{-4/5}^1 (4 + x - 5x^2) dx = \frac{2\pi}{9} \left[4x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} \right]_{x=-4/5}^{x=1} = \frac{27\pi}{25} \end{aligned}$$