FACULTAD DE INFORMATICA (UPM) **CURSO 2002/2003**
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA **CÁLCULO INFINITESIMAL**
Grupo 17T

PRIMER PARCIAL DE JUNIO (23/06/2003)

Problema 1. (1,5 puntos) Representa gráficamente la región del plano complejo dada por

$$(z - \overline{z})\, i \geq 0$$

y calcula las soluciones de la ecuación

$$z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

que pertenecen a dicha región.

Problema 2. (1,5 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano, y demuestra que la ecuación

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 + \cos x$$

admite alguna solución $x = \alpha$ con $-1 < \alpha < 3$.

Problema 3. (2 puntos) Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_0^{x^3} \ln \frac{1 + e^t}{2}\, dt$$

a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Calcula el valor del límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^6}$$

Problema 4. (2 puntos) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}(x - 2) \sin \frac{\pi}{x^2 - 5x + 6}$$

a) Determina el dominio D de f.
b) Estudia la continuidad (analizando sus discontinuidades) de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

Problema 5. (1,5 puntos) Sea $f : [0, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x - a)(x - 8)$, con $a \in (0, 8)$.
a) Razona si la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo) para todo valor de a.
b) Encuentra el valor de a para que uno de los extremos se alcance en $x = 6$.
c) Para el valor de a encontrado en b), estudia la concavidad de f y dibuja su gráfica.

Problema 6. (1,5 puntos) Calcula el volumen de revolución engendrado al girar alrededor del eje x la región que contiene al punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y que está limitada por las gráficas de $y = |x|$ y de la elipse $\frac{(x-1)^2}{3^2} + y^2 = 1$.