

PRIMER PARCIAL DE FEBRERO (24/01/2003)

SOLUCIONES

**Problema 1.** a) Representa el conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{2 - |x - 3|} \geq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

y calcula, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de dicho conjunto.

b) Sean  $z = 1 + 3i$  y  $w$  dos números complejos que verifican:  $w^3(z^2 + 8) = 2z - z^2 - 4$ . Calcula  $w$  en forma binómica.

**Solución:**

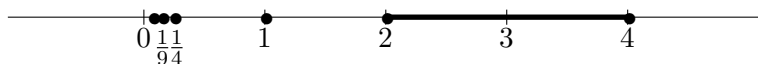
a) Se resuelve la desigualdad, que aparece en la definición del conjunto, cuya solución es:

$$\sqrt{2 - |x - 3|} \geq 1 \iff 2 - |x - 3| \geq 1 \iff |x - 3| \leq 1 \iff x \in [2, 4]$$

Por tanto:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\} \cup [2, 4]$$

y su representación gráfica es:



El supremo y máximo del conjunto  $A$  es 4, el ínfimo es 0, y el mínimo no existe.

b) Se despeja  $w^3$  y se sustituye  $z = 1 + 3i$ :

$$w^3 = \frac{2z - z^2 - 4}{z^2 + 8} = \frac{2(1 + 3i) - (1 + 3i)^2 - 4}{(1 + 3i)^2 + 8} = \frac{2 + 6i - 1 + 9 - 6i - 4}{1 - 9 + 6i + 8} = \frac{6}{6i} = \frac{1}{i} = -i$$

de donde:

$$w = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{i\frac{3\pi}{2}}} = e^{i\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ e^{i\frac{11\pi}{6}} = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

**Problema 2.** a) Halla el dominio  $D$  de la función:

$$g(x) = \frac{|x^2 - 2x - 3|(x - 2) \sin \frac{\pi}{x}}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

b) Estudia la continuidad (clasificando las discontinuidades) de la función:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

**Solución:**

La expresión de la función  $g$ , después de descomponer factorialmente los polinomios que en ella intervienen, es:

$$g(x) = \frac{|(x-3)(x+1)|(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x}$$

a) La función no está definida para  $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$ , por tanto, su dominio es:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2, 3\}$$

b) Las posibles discontinuidades de la función  $f$  son los puntos donde no está definida  $g$ , por lo que se estudia la continuidad en cada uno de ellos.

En  $x = -1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin(-\pi) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = - \lim_{x \rightarrow -1^+} \sin \frac{\pi}{x} = -\sin(-\pi) = 0 \end{aligned}$$

y entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1) \implies f \text{ es continua en } x = -1$$

En  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$$

y este límite no existe (la función oscila periódicamente entre  $-1$  y  $1$ ). Por tanto,  $f$  tiene una discontinuidad esencial en  $x = 0$ .

En  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = - \lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{\pi}{x} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \neq f(2)$$

y, por tanto,  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = 2$ .

En  $x = 3$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = - \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin \frac{\pi}{x} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)} \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

y, por tanto,  $f$  tiene una discontinuidad de salto en  $x = 3$ .

En resumen,  $f$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}$  siendo la primera discontinuidad esencial, la segunda evitable y la tercera de salto.

**Problema 3.** Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \ln \left( \frac{x^3}{3x-2} \right)$$

### Solución:

- Dominio. Puesto que

$$\frac{x^3}{3x-2} > 0 \iff x(3x-2) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

el dominio es  $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .

- Puntos de corte con los ejes. Puesto que  $x = 0$  no pertenece al dominio, la gráfica de la función no corta al eje de ordenadas. Los puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{3x-2}\right) = 0 \iff \frac{x^3}{3x-2} = 1 \iff x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

es decir,  $(-2, 0)$  y  $(1, 0)$ .

- Asíntotas. Puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{x^3}{3x-2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2/3^+} \ln\left(\frac{x^3}{3x-2}\right) = +\infty$$

son asíntotas verticales las rectas  $x = 0$  (por la izquierda) y  $x = 2/3$  (por la derecha). Sin embargo, no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^3}{3x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x^2}{3} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^3}{3x-2}\right)}{x} = 0$$

- Crecimiento. Se calcula la derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2(3x-2) - 3x^3}{(3x-2)^2}}{\frac{x^3}{3x-2}} = \frac{6(x-1)}{x(3x-2)}$$

que sólo se anula en  $x = 1$ . Los intervalos de crecimiento son:

- En  $(-\infty, 0)$ ,  $f'(x) < 0$  y, por tanto, la función es decreciente.
- En  $(2/3, 1)$ ,  $f'(x) < 0$  y, por tanto, la función es decreciente.
- En  $(1, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$  y, por tanto, la función es creciente.

de donde se deduce que la función alcanza un mínimo relativo en  $x = 1$ , que vale  $f(1) = 0$ .

- Concavidad. Se calcula la derivada segunda:

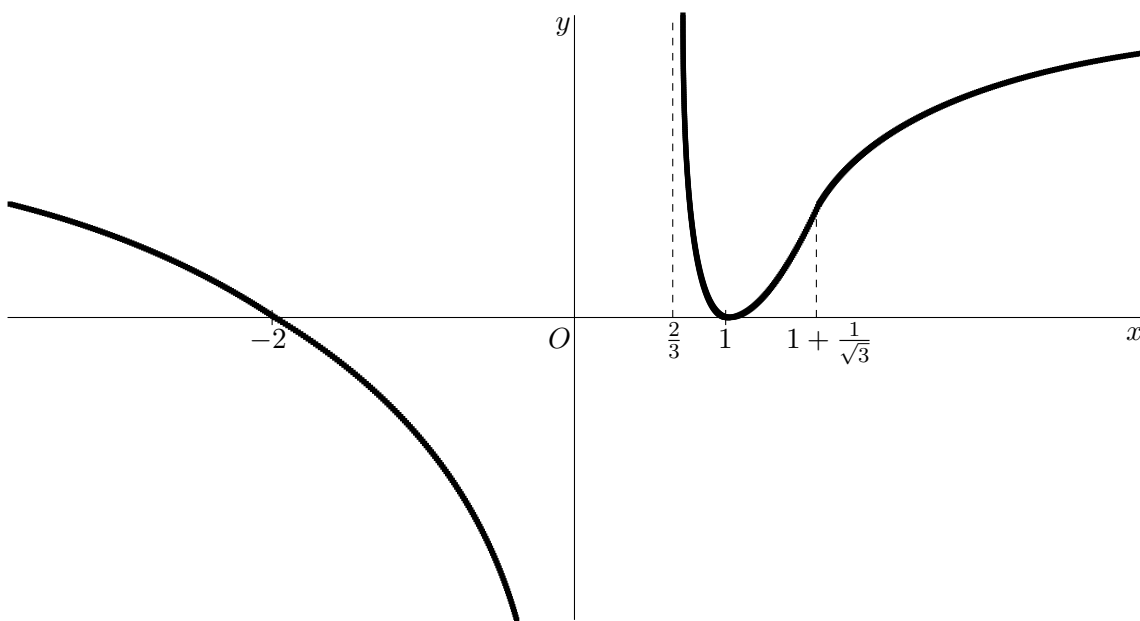
$$f''(x) = \frac{6x(3x-2) - 6(x-1)(6x-2)}{x^2(3x-2)^2} = \frac{-6(3x^2 - 6x + 2)}{x^2(3x-2)^2}$$

que se anula en  $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , de los que el único que pertenece al dominio es  $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 1,57$ . Los intervalos de concavidad son:

- En  $(-\infty, 0)$ ,  $f''(x) < 0$  y, por tanto, la función es cóncava hacia abajo (cóncava).
- En  $\left(\frac{2}{3}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $f''(x) > 0$  y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba (convexa).
- En  $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ ,  $f''(x) < 0$  y, por tanto, la función es cóncava hacia abajo (cóncava).

de donde se deduce que la función tiene un punto de inflexión en  $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Usando lo anterior, una representación gráfica aproximada de la función es:



**Problema 4.** a) Encuentra la expresión explícita (dependiente de los parámetros  $a$  y  $b$ ) para una función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  que verifica:

$$\int_1^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} + ax^6 + bx^4$$

b) Halla  $a$  y  $b$  si el polinomio de Taylor de  $f$  de grado 2 centrado en  $x = 1$  es:

$$P_2^1(x) = \frac{-3e}{4} + \frac{5e}{4}(x-1)^2$$

**Solución:**

a) Si  $x \neq 0$ ,  $x^2 > 0$  y se puede usar el teorema fundamental del cálculo integral para derivar la expresión integral:

$$2xf(x^2) = 2xe^{x^2} + 6ax^5 + 4bx^3 \implies f(x^2) = e^{x^2} + 3ax^4 + 2bx^2$$

Llamando  $x$  a  $x^2$ , se obtiene:

$$f(x) = e^x + 3ax^2 + 2bx \quad , \quad x > 0$$

b) De la expresión del polinomio de Taylor  $f$  de grado 2, centrado en  $x = 1$ , se sabe que

$$f(1) = \frac{-3e}{4} \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) = \frac{5e}{4} \cdot 2! = \frac{5e}{2}$$

e imponiendo estas condiciones a la función  $f$  se calculan los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 3ax^2 + 2bx \implies f(1) = e + 3a + 2b = \frac{-3e}{4} \\ f'(x) = e^x + 6ax + 2b \implies f'(1) = e + 6a + 2b = 0 \\ f''(x) = e^x + 6a \implies f''(1) = e + 6a = \frac{5e}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} 3a + 2b = \frac{-7e}{4} \\ 6a + 2b = -e \\ 6a = \frac{3e}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{e}{4} \\ b = \frac{-5e}{4} \end{cases}$$

**Problema 5.** a) *Calcula el volumen de revolución engendrado al girar alrededor del eje  $x$  la región:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}e^{2x}\}$$

b) *Halla la longitud de la curva  $y = \ln(\cos x)$ , desde  $x = 0$  a  $x = \pi/4$ .*

**Solución:**

a) El volumen de revolución es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x}e^{2x})^2 dx = \pi \int_0^1 xe^{4x} dx = \left( \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{4x} \Rightarrow v = \frac{e^{4x}}{4} \end{array} \right) = \pi \left[ x \frac{e^{4x}}{4} \right]_{x=0}^{x=1} - \\ &= \pi \int_0^1 \frac{e^{4x}}{4} dx = \frac{\pi}{4}(e^4 - 0) - \frac{\pi}{16} [e^{4x}]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi e^4}{4} - \frac{\pi e^4}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{(3e^4 + 1)\pi}{16} \end{aligned}$$

b) La longitud de la curva es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left( \frac{-\sin x}{\cos x} \right)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec x dx = [\ln |\sec x + \tan x|]_{x=0}^{\pi/4} = \ln \left| \sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right| - \ln |\sec 0 + \tan 0| = \\ &= \ln \left| \sqrt{2} + 1 \right| - \ln |1 + 0| = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$