

PRIMER PARCIAL DE JUNIO (27/06/2002)

SOLUCIONES

**Problema 1.**

Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

V F

**Solución:**

i) Sean  $z, u \in \mathbb{C}$ .

- a)  $|z|^2 = z\bar{z}$ .    
 b) Si  $z^5 = 1$ , entonces  $z = 1$ .    
 c)  $\left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}$  y  $\arg\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{\arg z}{\arg u}$ .

ii) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a)  $f$  es acotada en  $[a, b]$ .    
 b) Si  $c \in (a, b)$  y  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ , entonces  $f$  es continua en  $x = c$ .    
 c) Si  $f(a)f(b) < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

iii) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $(a, b)$ .

- a)  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .    
 b) Si  $c \in (a, b)$  y  $f'(c) = 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo o mínimo en  $x = c$ .    
 c) Si  $f$  es derivable en  $c \in (a, b)$  y  $g(x) = ce^{x/2}$ , entonces  $(f \circ g)'(0) = \frac{c}{2}f'(c)$ .

iv) Sean  $f : [0, a^2] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ .

- a) Si  $f$  es integrable en  $[0, a^2]$ , entonces  $F$  es continua en  $[0, |a|]$ .    
 b)  $F$  es una primitiva de  $f$ .    
 c) Si  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , entonces  $F'(1) = \sqrt{2}$ .

**Problema 2.**

a) Expresa en forma binómica todas las soluciones de la ecuación:  $-x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$ .

b) Calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}\right)^x$ .

**Solución:**

a) Es fácil comprobar, por Ruffini, que el polinomio que define la ecuación es divisible por  $x - 3$ :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

y entonces:

$$-x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 3 = -(x-3)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \iff \begin{cases} x-3=0 \iff x=3 \\ x^4 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Se resuelve la ecuación bicuadrada:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y se extraen raíces cuadradas a cada una de las soluciones:

$$x = \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} = e^{i(\frac{\pi}{3} + k\pi)} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$x = \sqrt{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3} + 2k\pi} = e^{i(\frac{2\pi}{3} + k\pi)} = \begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ e^{i(\frac{2\pi}{3} + \pi)} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Por tanto, en forma binómica, las cinco soluciones de la ecuación son:  $x = 0$  y  $x = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

b) Puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \right)^x &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + 1 - \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - x}}} \right)^{\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - x}}} \right]^{x - \sqrt{x^2 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - x})(x + \sqrt{x^2 - x})}{x + \sqrt{x^2 - x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+x}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

### Problema 3.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse  $x^2 - 6x + 2y^2 = -3$  en su punto de intersección con la curva  $3y^2 - 2xy + 7 = 0$  de abscisa  $x = 5$ .

b) Halla las coordenadas de los vértices del rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación:  $x^2 - 6x + 2y^2 = 0$ .

### Solución:

a) Los puntos de la elipse con abscisa  $x = 5$  son:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 2y^2 = -3 \\ x = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 5^2 - 6 \cdot 5 + 2y^2 = -3 \\ x = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A(5, 1) \\ B(5, -1) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la curva, el punto  $B$  no la verifica y el punto  $A$  sí la verifica, es decir,  $A$  pertenece a ella y  $B$  no. Por tanto, se trata de hallar la recta tangente a la elipse en el

punto  $A(5, 1)$ . Se deriva implícitamente la ecuación de la elipse para hallar su derivada en dicho punto:

$$x^2 - 6x + 2y^2 = -3 \implies 2x - 6 + 4yy' = 0 \implies y' = \frac{3-x}{2y} \implies y'|_{(5,1)} = \frac{3-5}{2 \cdot 1} = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto  $A(5, 1)$  es:

$$y - 1 = -1(x - 5)$$

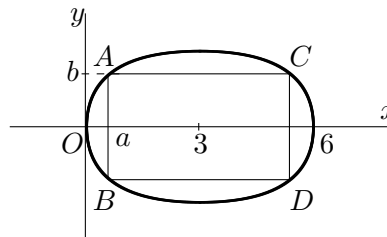
es decir,  $x + y = 6$ .

b) Se halla la ecuación normal de la elipse y se dibujan la elipse y el rectángulo inscrito:

$$x^2 - 6x + 2y^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 + 2y^2 = 9$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{9/2} = 1$$



Si los vértices del rectángulo son  $A(a, b)$ ,  $B(a, -b)$ ,  $C(6 - a, b)$  y  $D(6 - a, -b)$ , con  $0 < a < 3$  y  $b > 0$ , su base y altura miden  $6 - 2a$  y  $2b$ , respectivamente. Puesto que  $A(a, b)$  es un punto de la elipse, debe verificar su ecuación, y el área del rectángulo en función de  $a$  es:

$$\begin{cases} A = 2b(6 - 2a) \\ a^2 - 6a + 2b^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 2b(6 - 2a) \\ b = \sqrt{\frac{6a - a^2}{2}} \end{cases} \implies A(a) = 2\sqrt{\frac{6a - a^2}{2}}(6 - 2a), \quad 0 < a < 3$$

Operando y simplificando, el área del rectángulo es:

$$A(a) = 2\sqrt{2}(3 - a)\sqrt{6a - a^2}, \quad 0 < a < 3$$

Para hallar los extremos relativos, se calcula la derivada de la función área:

$$A'(a) = 2\sqrt{2} \left[ (3 - a) \frac{6 - 2a}{2\sqrt{6a - a^2}} - \sqrt{6a - a^2} \right] = 2\sqrt{2} \frac{(3 - a)^2 - (6a - a^2)}{\sqrt{6a - a^2}} = 2\sqrt{2} \frac{2a^2 - 12a + 9}{\sqrt{6a - a^2}}$$

y se hallan los puntos críticos:

$$A'(a) = 2\sqrt{2} \frac{2a^2 - 12a + 9}{\sqrt{6a - a^2}} = 0 \iff 2a^2 - 12a + 9 = 0 \iff a = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 72}}{4} = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

de los que sólo  $a = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$  pertenece al intervalo  $(0, 3)$ . Además:

$$A'(a) \begin{cases} > 0 & , \text{ si } 0 < a < 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \\ < 0 & , \text{ si } 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} < a < 3 \end{cases} \implies \text{Máximo relativo en } a = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

que, por ser el único punto crítico en el intervalo, también es absoluto. Por tanto, el rectángulo de mayor área se obtiene para

$$a = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{6a - a^2}{2}} = \frac{3}{2}$$

en cuyo caso, los vértices del rectángulo son:

$$A\left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right) \quad B\left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{2}\right) \quad C\left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right) \quad D\left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{2}\right)$$

**Problema 4.**

Se considera la función:  $F(x) = \int_0^x t^3 \operatorname{sen}^3 t \, dt$ ,  $x \geq 0$ .

- a) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Halla las abscisas de los extremos relativos de  $F$ .

**Solución:**

a) Por el teorema fundamental del cálculo, puesto que  $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^3 x$  es siempre continua, la función  $F$  es derivable y su derivada es:

$$F'(x) = x^3 \operatorname{sen}^3 x$$

En  $x \geq 0$ , el signo de la derivada es el signo del seno y, por tanto:

$$F'(x) = x^3 \operatorname{sen}^3 x \begin{cases} > 0 & , \text{ si } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ = 0 & , \text{ si } x = k\pi, k > 0 \\ < 0 & , \text{ si } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}$$

de donde se deduce que:

$$\begin{cases} F \text{ es creciente en } (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ F \text{ es decreciente en } (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup (5\pi, 6\pi) \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}$$

b) Como consecuencia inmediata de lo anterior:

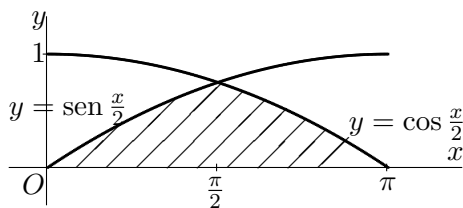
$$\begin{cases} F \text{ tiene máximos relativos en } x = (2k+1)\pi, k \geq 0 \\ F \text{ tiene mínimos relativos en } x = (2k+2)\pi, k \geq 0 \end{cases}$$

**Problema 5.**

- a) Calcula el área limitada, entre  $x = 0$  y  $x = \pi$ , por el eje de abscisas y las funciones  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$  y  $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ .
- b) Halla el volumen de revolución obtenido al girar la región anterior alrededor del eje de abscisas.

**Solución:**

a) La región limitada, entre  $x = 0$  y  $x = \pi$ , por el eje de abscisas y las funciones  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$  y  $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ , es el recinto de la figura:



Su área, aplicando simetría, es:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \left[ -2 \cos \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = -4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 4 - 2\sqrt{2}$$

b) El volumen de revolución, aplicando de nuevo simetría, es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{2} dx = \\ &= \pi [x - \sin x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \pi \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - 0 \right] = \frac{\pi(\pi - 2)}{2} \end{aligned}$$