FACULTAD DE INFORMÁTICA (UPM)
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA

CURSO 2001/2002
CÁLCULO INFINITESIMAL
Grupo 17T

PRIMER PARCIAL DE JUNIO (27/06/2002)

Problema 1. (2 puntos)
Señala la certeza o falsedad de las cuestiones que aparecen en la siguiente página. (Cada pregunta con los tres apartados acertados puntuará 0.5, con dos aciertos y una en blanco 0.3, con dos aciertos y un error o un acierto y dos en blanco 0.2, y con más de un error no puntúa).

Problema 2. (2 puntos)
a) Expresa en forma binómica todas las soluciones de la ecuación:

$$-x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$$

b) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}\right)^x$$

Problema 3. (2 puntos)
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2 - 6x + 2y^2 = -3$ en su punto de intersección con la curva $3y^2 - 2xy + 7 = 0$ de abscisa $x = 5$.
b) Halla las coordenadas de los vértices del rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación: $x^2 - 6x + 2y^2 = 0$.

Problema 4. (2 puntos)
Se considera la función: $F(x) = \int_0^x t^3 \operatorname{sen}^3 t \, dt$, $x \geq 0$.
a) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Halla las abscisas de los extremos relativos de F.

Problema 5. (2 puntos)
a) Calcula el área limitada, entre $x = 0$ y $x = \pi$, por el eje de abscisas y las funciones $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ y $g(x) = \cos \frac{x}{2}$.
b) Halla el volumen de revolución obtenido al girar la región anterior alrededor del eje de abscisas.

Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones. V F

i) Sean $z, u \in \mathbb{C}$.

- **a)** $|z|^2 = z\overline{z}$. ☐ ☐
- **b)** Si $z^5 = 1$, entonces $z = 1$. ☐ ☐
- **c)** $\left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}$ y $\arg\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{\arg z}{\arg u}$. ☐ ☐

ii) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

- **a)** f es acotada en $[a, b]$. ☐ ☐
- **b)** Si $c \in (a, b)$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$, entonces f es continua en $x = c$. ☐ ☐
- **c)** Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. ☐ ☐

iii) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a, b).

- **a)** f es integrable en $[a, b]$. ☐ ☐
- **b)** Si $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o mínimo en $x = c$. ☐ ☐
- **c)** Si f es derivable en $c \in (a, b)$ y $g(x) = ce^{x/2}$, entonces $(f \circ g)'(0) = \frac{c}{2} f'(c)$. ☐ ☐

iv) Sean $f : [0, a^2] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$.

- **a)** Si f es integrable en $[0, a^2]$, entonces F es continua en $[0, |a|]$. ☐ ☐
- **b)** F es una primitiva de f. ☐ ☐
- **c)** Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, entonces $F'(1) = \sqrt{2}$. ☐ ☐