

PRIMER PARCIAL DE FEBRERO (29/01/2002)

SOLUCIONES

**Problema 1.**

Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

V F

**Solución:**

i) Sean  $z, u \in \mathbb{C}$ .

- a) Pueden existir  $u, z \in \mathbb{R}$  tales que  $|uz| > |u||z|$ .
- b) Se cumple que  $|1 + i| = 2$ .
- c) Se cumple que  $|\bar{z}| = \overline{|z|}$ .

ii) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y  $f(a) = f(b)$ .

- a)  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .
- b)  $f$  alcanza en  $[a, b]$  su máximo y mínimo absolutos.
- c)  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

iii) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $(a, b)$ .

- a)  $f$  es continua en  $(a, b)$ .
- b)  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ .
- c)  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

iv) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a) Si  $f$  no es continua en algún punto de  $[a, b]$ , entonces  $f$  no es integrable en  $[a, b]$ .
- b) Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene primitiva en  $[a, b]$ .
- c) Si  $f$  tiene primitiva en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

**Problema 2.**

Se considera la función:  $f(x) = \frac{(x-a)\sqrt{x+4}}{(x-3)e^{-1/x}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Halla el dominio  $D$  de  $f$ .

b) Estudia, según los valores de  $a \in \mathbb{R}$ , la continuidad (clasificando las discontinuidades) de la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \in D \\ 0 & , \text{ si } x \notin D \end{cases}$$

**Solución:**

a) Un punto  $x \in \mathbb{R}$  pertenece al dominio de la función si:

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4 \iff x \in [-4, +\infty) \\ x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in [-4, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$$

Por tanto, el dominio es  $D = [-4, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$ .

b) La función  $g$  es continua en el dominio de  $f$ , es decir, en  $D$  y, por tanto, sus únicas posibles discontinuidades serían en los puntos  $x = 0$  y  $x = 3$ . Lo que ocurre en estos puntos depende de los valores de  $a$ :

- Si  $a \neq 0$  y  $a \neq 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-a)\sqrt{x+4}}{(x-3)e^{-1/x}} = \frac{2a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \rightarrow 0^- \\ \pm\infty & , \text{ si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-a)\sqrt{x+4}}{(x-3)e^{-1/x}} = \frac{(3-a)\sqrt{7}}{e^{-1/3}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \pm\infty$$

donde el signo del infinito en el primer límite es el de  $a$ , y en el segundo límite, que también depende de  $a$ , es distinto por la derecha de por la izquierda. Por tanto, en este caso,  $x = 0$  y  $x = 3$  son discontinuidades esenciales.

- Si  $a = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}}{e^{-1/x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & , \text{ si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+4}}{e^{-1/x}} = \sqrt{7}e^{1/3} \neq 0 = g(3)$$

Por tanto, en este caso,  $x = 0$  es una discontinuidad esencial, y  $x = 3$  es una discontinuidad evitable.

- Si  $a = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+4}}{(x-3)e^{-1/x}} = 3\sqrt{7}e^{1/3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & , \text{ si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+4}}{(x-3)e^{-1/x}} = \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} xe^{1/x}$$

y se hallan, por separado, los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = (0 \cdot \infty) = \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{H}{=} \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \\ &= \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = -\infty \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso,  $x = 0$  y  $x = 3$  son discontinuidades esenciales.

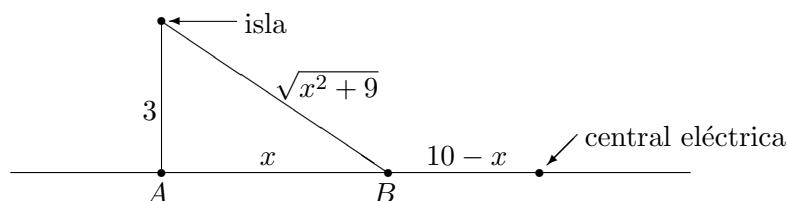
### Problema 3.

Una isla está situada a 3 km del punto A más cercano de la costa, que es recta. En la costa, a 10 km del punto A, hay una central eléctrica. Se quieren comunicar la isla y la central mediante un cable que conste de una parte submarina, entre la isla y un punto B (entre el punto A y la central), y otra parte subterránea, entre el punto B y la central. El coste de cable submarino es de 20 000 €/km, y el de cable subterráneo de 12 000 €/km.

- a) Encuentra la función que da el coste del cable necesario en función de la distancia entre los puntos A y B, y represéntala gráficamente (en el dominio considerado).  
b) Encuentra el coste mínimo del cable necesario para establecer la comunicación. ¿Cuál sería su coste máximo?

### Solución:

a) Según los datos del enunciado, se tiene el esquema que aparece en la siguiente figura:



El coste del cable necesario, en miles de euros, en función de la distancia entre A y B es:

$$C(x) = 20\sqrt{x^2 + 9} + 12(10 - x), \quad 0 \leq x \leq 10$$

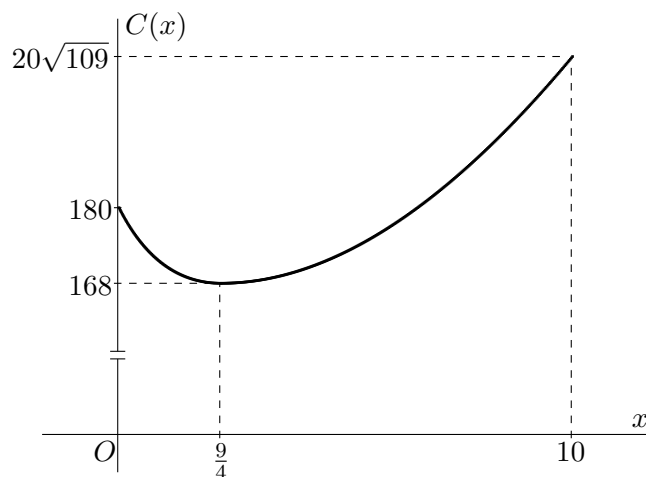
Para representar gráficamente esta función, se estudia el crecimiento y puntos críticos a partir de su derivada:

$$C'(x) = \frac{20x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 12 = 0 \iff 12\sqrt{x^2 + 9} = 20x \iff 144(x^2 + 9) = 400x^2 \iff x = \frac{9}{4}$$

Este punto crítico divide al dominio en dos intervalos donde se estudia el signo de la derivada:

- En  $[0, 9/4)$  la derivada es negativa y la función es decreciente.
- En  $(9/4, 10]$  la derivada es positiva y la función es creciente.

En el punto  $x = \frac{9}{4}$  la función alcanza un mínimo relativo cuyo valor es  $C(\frac{9}{4}) = 168$ , siendo los valores de la función en los extremos del dominio:  $C(0) = 180$  y  $C(10) = 20\sqrt{109} \simeq 208,806$ . Con los datos obtenidos, la gráfica de la función es aproximadamente la de la figura:



b) A la vista de la representación gráfica de la función, los costes mínimo y máximo para establecer la comunicación son:

$$\begin{cases} \text{Coste mínimo: } 1000 \cdot C\left(\frac{9}{4}\right) = 168\,000 \text{ €} \\ \text{Coste máximo: } 1000 \cdot C(10) = 1000 \cdot 20\sqrt{109} \simeq 208\,806 \text{ €} \end{cases}$$

**Problema 4.**

Se considera la función:  $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t^2 + 1} dt$ .

- Halla su dominio y simetrías.
- Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.
- Encuentra los puntos donde se alcanzan sus extremos absolutos en cada uno de los siguientes intervalos:  $[-1, 3]$ ,  $[-5, 5]$  y  $[3, 7]$ .
- ¿Está  $F$  acotada en su dominio?

**Solución:**

a) Puesto que la función integrando,  $f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 + 1}$ , es continua en toda la recta real, y las funciones que definen los límites de integración son siempre derivables, la función  $F$  es continua y derivable en toda la recta real, que es su dominio:  $D(F) = \mathbb{R}$

Al ser  $F(-x) = F(x)$ , la función es par y su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) Usando el teorema fundamental del cálculo, la derivada de la función  $F$  es:

$$F'(x) = \frac{|\operatorname{sen} x^2|}{x^4 + 1} \cdot 2x = \frac{2x |\operatorname{sen} x^2|}{x^4 + 1} \begin{cases} \leq 0 & , \text{ si } x \leq 0 \\ \geq 0 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que la función es decreciente en  $(-\infty, 0)$ , creciente en  $(0, +\infty)$ , y alcanza un mínimo relativo en  $x = 0$  que vale  $F(0) = 0$ .

c) Puesto que la función es continua, alcanza extremos absolutos en cualquier intervalo cerrado y acotado, como los que se plantean.

- En el intervalo  $[-1, 3]$  está el mínimo relativo que, al ser el único extremo relativo, es absoluto. El máximo absoluto lo alcanza en uno de los extremos siendo, por la paridad de la función y por el crecimiento estudiado en el apartado anterior:

$$F(-1) = F(1) \leq F(3)$$

Por tanto, el mínimo absoluto lo alcanza en  $x = 0$  y el máximo absoluto en  $x = 3$ .

- Por los mismos argumentos, en el intervalo  $[-5, 5]$  alcanza el mínimo absoluto en  $x = 0$  y el máximo absoluto en  $x = -5$  y en  $x = 5$ .
- En el intervalo  $[3, 7]$  la función es creciente y, por tanto, alcanza el mínimo absoluto en  $x = 3$  y el máximo absoluto en  $x = 7$ .

d) El valor absoluto del seno es menor o igual que 1, y usando las propiedades de la integral:

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_0^{x^2} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\arctan t]_{t=0}^{t=R} = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la función  $F$  está acotada en su dominio.

**Problema 5.**

a) Se consideran las curvas  $y = 2 - x^2$  e  $y = ax^2$ . Determina el valor de  $a > 0$  para que el área encerrada entre las dos curvas sea la mitad del área de la región acotada limitada por la primera curva y el eje de abscisas.

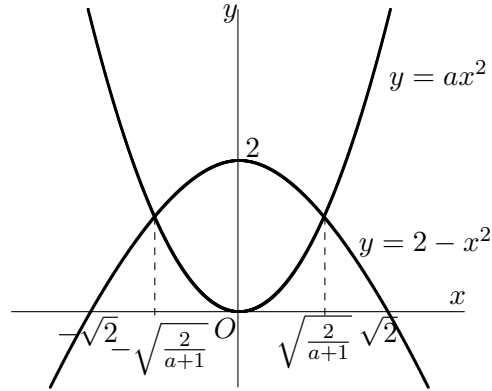
b) Para el valor de  $a$  encontrado en el apartado anterior, halla el volumen de revolución engendrado al girar la región acotada limitada por las dos curvas anteriores, alrededor del eje de abscisas.

c) Calcula la integral:  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{-x^3 + 2x^2 - x}$ .

**Solución:**

a) La curva  $y = 2 - x^2$  es una parábola con vértice en  $(0, 2)$  y curvatura hacia abajo, que corta al eje de abscisas en  $x = \pm\sqrt{2}$ ; y la curva  $y = ax^2$ ,  $a > 0$ , es una parábola con vértice en el origen y curvatura hacia arriba. La abscisa de los puntos de corte de las dos parábolas son:

$$ax^2 = 2 - x^2 \iff (a + 1)x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{\frac{2}{a+1}}$$



Por simetría, el área encerrada entre las dos curvas es:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{2}{a+1}}} [(2 - x^2) - ax^2] dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{2}{a+1}}} [2 - (a + 1)x^2] dx = 2 \left[ 2x - \frac{(a + 1)x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{2}{a+1}}} = \\ &= 2 \left( 2\sqrt{\frac{2}{a+1}} - \frac{a + 1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{(a + 1)\sqrt{a + 1}} \right) = 2 \left( \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a + 1}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{a + 1}} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{a + 1}} \end{aligned}$$

y, también por simetría, el área de la región acotada limitada por la curva  $y = 2 - x^2$  y el eje de abscisas es:

$$A_2 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} = 2 \left( 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

El primer área es la mitad del segundo si:

$$A_1 = \frac{A_2}{2} \iff \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{a+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{3} \iff \sqrt{a+1} = 2 \iff a = 3$$

b) Para  $a = 3$ , las abscisas de los puntos de corte entre las dos curvas son  $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$  y, por simetría, el volumen de revolución engendrado al girar la región acotada limitada por las dos curvas, alrededor del eje de abscisas, es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} [(2 - x^2)^2 - (3x^2)^2] dx = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (4 - 4x^2 - 8x^4) dx = \\ &= 2\pi \left[ 4x - \frac{4x^3}{3} - \frac{8x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} = 2\pi \left( \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{5\sqrt{2}} \right) = \frac{88\pi}{15\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) En primer lugar, se calcula la integral indefinida, para lo que se hace la descomposición en fracciones simples del integrando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{-x^3 + 2x^2 - x} &= \frac{-1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \iff \\ \iff \frac{-1}{x(x-1)^2} &= \frac{a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx}{x(x-1)^2} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b+c=0 \\ a=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

y entonces:

$$\int \frac{dx}{-x^3 + 2x^2 - x} = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x-1} + c$$

La integral impropia pedida es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{-x^3 + 2x^2 - x} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{-1} \frac{dx}{-x^3 + 2x^2 - x} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x-1} \right]_{x=-r}^{x=-1} = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \left( \ln \left| \frac{-r-1}{-r} \right| + \frac{1}{-r-1} \right) \right] = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln \frac{r+1}{r} + \frac{1}{r+1} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$