

## Soluciones

### Teoría

Señala la certeza o falsedad de las siguientes cuestiones:

### Solución:

V F

- i) a)  $|x - a| < 2 \iff x \in (a - 2, a + 2)$ .
- b)  $|e^{ib}| = 1$  para todo  $b \in \mathbb{R}$ .
- c)  $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$ .
- ii) a)  $0^\infty$  es una indeterminación.
- b)  $f$  es continua en  $a \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$ .
- iii) a)  $f$  continua y acotada en  $(a, b) \Rightarrow f$  derivable.
- b) Si  $f(x) = |x^2 + 1| \Rightarrow f'(x) = 2x$ .
- c) Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b) \Rightarrow$  existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .
- iv) a)  $\int \frac{a^2}{x^2 + b^2} dx = \frac{a^2}{b^2} \arctan \left( \frac{x}{b} \right) + C$ .
- b)  $f$  derivable en  $[a, b] \Rightarrow f$  integrable en  $[a, b]$ .
- c)  $\int f(x)g(x)dx = f(x) \int g(x)dx + g(x) \int f(x)dx$ .

## Problema 2

- a) Clasifica las discontinuidades y determina las asíntotas horizontales y verticales de la función:

$$f(x) = \frac{(x-2)e^{-1/x} \cos \frac{2\pi}{x-2} \operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{x^2 - 4x + 3}$$

- b) Sin hacer ningún cálculo adicional, esboza la gráfica cerca de las asíntotas.

### Solución:

- a) Puesto que

$$f(x) = \frac{(x-2)e^{-1/x} \cos \frac{2\pi}{x-2} \operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-2)e^{-1/x} \cos \frac{2\pi}{x-2} \operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{(x-1)(x-3)}$$

la función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos  $x = 0, 1, 2, 3$ , donde no está definida. Hallando los correspondientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } x \rightarrow 0^- \\ 0 & , \text{ si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{x-1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi x \cos \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{1} = \frac{\pi}{2e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \cos \frac{2\pi}{x-2} = (0 \cdot \text{acotada}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{e}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{x-3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2\sqrt[3]{e}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\pi x \cos \frac{\pi(x^2-1)}{2}}{1} = \frac{3\pi}{2\sqrt[3]{e}}$$

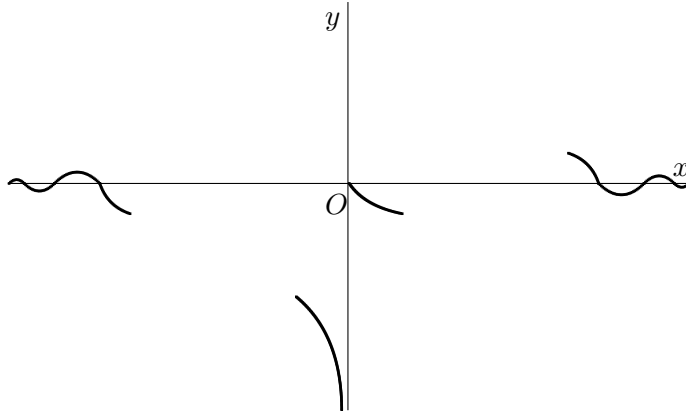
se observa que en  $x = 0$  la discontinuidad es esencial, y en el resto de puntos ( $x = 1, x = 2$  y  $x = 3$ ) la discontinuidad es evitable.

En  $x = 0$  tiene una asíntota vertical y, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} \operatorname{sen} \frac{\pi(x^2-1)}{2} \right) = (0 \cdot \text{acotada}) = 0$$

la recta  $y = 0$  es asíntota horizontal en  $\pm\infty$ .

- b) Un esbozo de la gráfica de  $y = f(x)$  alrededor de sus asíntotas es:



### **Problema 3**

La expresión  $x^3 + 2xy + y^3 = 3$  define implícitamente una función  $y = f(x)$ , en un entorno de  $a = -1$ .

- Halla su polinomio de Taylor de grado 2 en un entorno del punto  $a = -1$ .
- Halla un valor aproximado de la función  $y = f(x)$  en  $x = -0.9$ .
- ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $a = -1$ ?

#### **Solución:**

- a) Sustituyendo  $x = -1$  en la ecuación implícita, se obtiene la ordenada:

$$(-1)^3 + 2(-1)y + y^3 = 3 \implies y^3 - 2y - 4 = (y - 2)(y^2 + 2y + 2) = 0 \implies y = 2$$

Derivando implícitamente dos veces:

$$3x^2 + 2y + (2x + 3y^2)y' = 0 \implies y' = \frac{-3x^2 - 2y}{2x + 3y^2}$$

$$6x + 2y' + (2 + 6yy')y' + (2x + 3y^2)y'' = 0 \implies y'' = \frac{-6x - (4 + 6yy')y'}{2x + 3y^2}$$

Luego:

$$f(-1) = 2; \quad f'(-1) = y'(-1, 2) = \frac{-7}{10}; \quad f''(-1) = y''\left(-1, 2, \frac{-7}{10}\right) = \frac{292}{1000}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 en un entorno de  $a = -1$  es:

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x + 1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x + 1)^2 = 2 - \frac{7}{10}(x + 1) + \frac{146}{1000}(x + 1)^2$$

- b) Un valor aproximado de la función en  $x = -0,9$  es:

$$f(-0,9) \approx P_2(-0,9) = 2 - \frac{7}{10} \cdot 0,1 + \frac{146}{1000} \cdot 0,1^2 = 1,93146$$

- c) La ecuación de la recta tangente a la función en  $a = -1$  es:

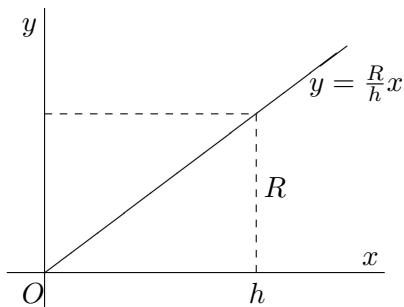
$$y = 2 - \frac{7}{10}(x + 1)$$

### Problema 4

- a) Demuestra mediante una integral que el volumen del cono de radio  $R$  y altura  $h$  es  $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ .
- b) Dado un cono de radio  $R$  y altura  $h$ , determina las dimensiones del cono de mayor volumen que puede inscribirse dentro de él, de manera que el vértice esté en el centro de la base del cono dado y los ejes de ambos coincidan.

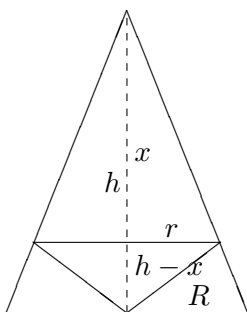
### Solución:

- a) Al girar, alrededor del eje  $x$ , el recinto limitado por la recta  $y = \frac{R}{h}x$  sobre el intervalo  $[0, h]$ , se obtiene un cono de radio  $R$  y altura  $h$ . Luego su volumen es:



$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

- b) Como se puede observar de la sección de la figura, el volumen del cono inscrito es:



$$\frac{R}{h} = \frac{r}{x} \implies r = \frac{Rx}{h}$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2(h-x) = \frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)x^2, \quad 0 < x < h$$

La función  $V(x)$  tiene un único punto crítico en el intervalo  $(0, h)$ :

$$V'(x) = \frac{\pi R^2}{3h^2}(2xh - 3x^2) = \frac{\pi R^2}{3h^2}(2h - 3x)x = 0 \implies x = \frac{2h}{3}$$

que corresponde a un máximo relativo, ya que

$$V''(x) = \frac{\pi R^2}{3h^2}(2h - 6x) \implies V''\left(\frac{2h}{3}\right) = \frac{-2\pi R^2}{3h} < 0$$

que es absoluto en el intervalo  $(0, h)$ . Luego las dimensiones del cono inscrito de volumen máximo son:

$$\text{Radio} = \frac{R}{h} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2R}{3} \quad \text{Altura} = h - \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}$$

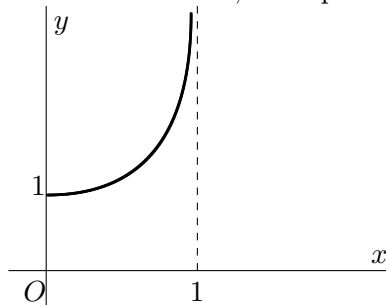
### Problema 5

Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- a) Obtén el área de la región situada en el primer cuadrante, limitada por la gráfica de  $f$  y su asíntota vertical.
- b) Obtén el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $OX$ , la región del apartado a).

**Solución:** La gráfica aproximada de la función, en el primer cuadrante, es:



Luego:

a)

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 1^-} [\arcsen x]_{x=0}^a = \lim_{a \rightarrow 1^-} \arcsen a = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{a \rightarrow 1^-} \left[ \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_{x=0}^a = \frac{\pi}{2} \lim_{a \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| = \infty \end{aligned}$$