

Cálculo Infinitesimal (Grupo 17T)

Primer Parcial
31 de Enero de 2001

Tiempo 2:30h.
2 + 2 + 2 + 2 + 2

Soluciones

Problema 1

- (a) Justifica que la ecuación $x^5 + x^3 + 5 = 0$ tiene al menos una solución real, y encuentra un intervalo de longitud uno que la contenga.
- (b) Enuncia el teorema de Bolzano, y estudia si se puede aplicar para afirmar que la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$$

se anula en algún punto del intervalo $(0, 2)$.

Solución:

- (a) Considerando la función $f(x) = x^5 + x^3 + 5$, se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ es continua en } [-2, -1] \\ f(-2) = -35 < 0 \\ f(-1) = 3 > 0 \end{array} \right\} \text{Th. de Bolzano} \implies \exists \alpha \in (-2, -1) \text{ tal que } f(\alpha) = 0$$

y $x = \alpha \in (-2, -1)$ es solución de la ecuación.

- (b) Teorema Bolzano: *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Puesto que la función $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$ no es continua en $x = 1$, no se puede aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y no se puede afirmar que la función se anula en algún punto de dicho intervalo.

Problema 2

- (a) Clasifica las discontinuidades y determina las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$f(x) = \frac{1}{x - xe^{(x+2)/(x-1)}}$$

- (b) Sin hacer cálculos adicionales, esboza su gráfica.

Solución:

- (a) La función no es continua en los puntos $x = -2, 0, 1$. Estudiando los límites laterales en cada punto, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \left(\frac{1}{-2(1-e^{0^+})} = \frac{1}{-2(1-1^+)} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \left(\frac{1}{-2(1-e^{0^-})} = \frac{1}{-2(1-1^-)} \right) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{discontinuidad esencial} \\ \text{en } x = -2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left(\frac{1}{1-e^{-\infty}} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left(\frac{1}{1-e^{+\infty}} \right) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{discontinuidad esencial} \\ \text{(de salto) en } x = 1 \end{array} \right.$$

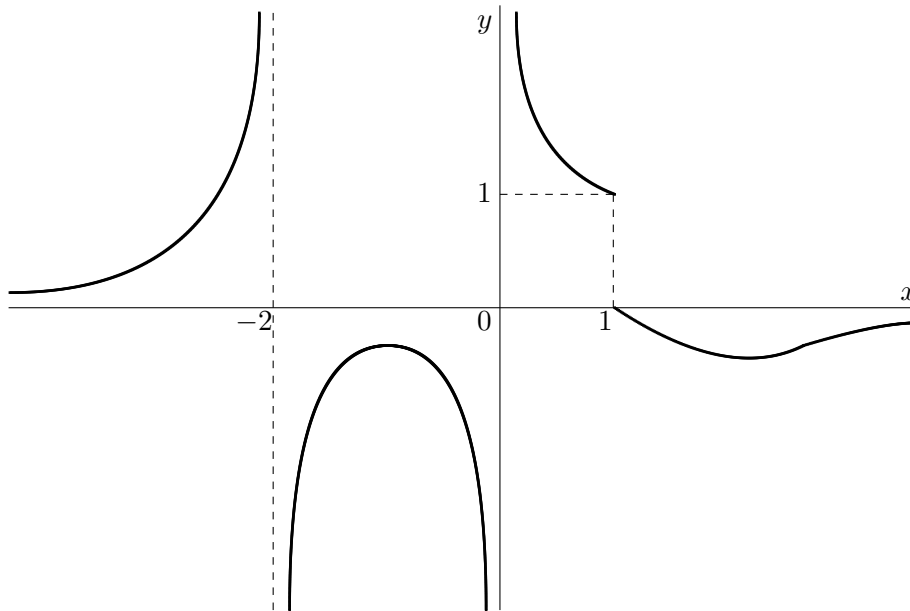
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left(\frac{1}{0^-(1-e^{-2})} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left(\frac{1}{0^+(1-e^{-2})} \right) = +\infty \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{discontinuidad esencial} \\ \text{en } x = 0 \end{array} \right.$$

Luego $x = -2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Además:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left(\frac{1}{-\infty(1-e)} \right) = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{1}{+\infty(1-e)} \right) = 0^-$$

luego $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$.

(b) Usando los cálculos del apartado anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



Problema 3

(a) Dada la función

$$f(x) = \frac{x-a}{1-e^{x-a}}$$

con $a \in \mathbb{R}$, ¿cómo se debe definir en $x = a$ para que sea continua y derivable en todo \mathbb{R} ? Calcula $f'(a)$.

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + xy^2 + y^3 + 3 = 0$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- (a) La función no está definida en $x = a$, lo que supone su único punto de discontinuidad. Para que aquí sea continua, habrá que definirla como

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{1-e^{x-a}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{-e^{x-a}} = -1$$

Luego la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{1-e^{x-a}} & , \text{ si } x \neq a \\ -1 & , \text{ si } x = a \end{cases}$$

es continua en toda la recta real. Su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - e^{x-a} + (x-a)e^{x-a}}{(1 - e^{x-a})^2} = \frac{1 + (x-a-1)e^{x-a}}{(1 - e^{x-a})^2} \quad , \quad \text{si } x \neq a \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x-a}{1-e^{x-a}} - (-1)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a+1-e^{x-a}}{(x-a)(1-e^{x-a})} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - e^{x-a}}{1 - e^{x-a} - (x-a)e^{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - e^{x-a}}{1 - (x-a+1)e^{x-a}} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{-e^{x-a}}{-(x-a+2)e^{x-a}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (b) Sustituyendo la abscisa $x = 1$, en la ecuación de la curva, se obtiene la ordenada del punto:

$$1 + y^2 + y^3 + 3 = 0 \implies y^3 + y^2 + 4 = (y+2)(y^2 - y + 2) = 0 \implies y = -2$$

Derivando implícitamente la ecuación de la curva:

$$2x + y^2 + 2xyy' + 3y^2y' = 0 \implies y' = \frac{-2x - y^2}{2xy + 3y^2} \implies y'(1, -2) = \frac{-3}{4}$$

Luego la ecuación de la recta tangente, en el punto de abscisa $x = 1$, es

$$y - (-2) = \frac{-3}{4}(x - 1) \implies 3x + 4y + 5 = 0$$

Problema 4

- (a) Estudia hasta qué orden existen las derivadas en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{ si } x \leq 0 \\ \int_0^x t^2 \ln t \, dt & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- (b) Usando el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 1$, aproxima el valor de la función en $x = 1/2$ y acota el error cometido.

Solución:

(a) Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

la función $g(x) = x^2 \ln x$ se puede suponer continua por la derecha en $x = 0$ con valor $g(0) = 0$, y la integral que define f no es impropia. Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x t^2 \ln t \, dt = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

y la función es continua en $x = 0$. Usando el teorema fundamental del cálculo integral,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \text{ si } x < 0 \\ x^2 \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 = 0 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \end{array} \right\} \implies f'(0) = 0$$

Análogamente, puesto que f' es continua,

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & , \text{ si } x < 0 \\ x + 2x \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} f''(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x = 0 \\ f''(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2x \ln x) = 0 \end{array} \right.$$

luego $f''(0) = 0$. Finalmente, puesto que f'' es continua,

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & , \text{ si } x < 0 \\ 3 + 2 \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} f'''(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6 = 6 \\ f'''(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + 2 \ln x) = -\infty \end{array} \right.$$

luego no existe $f'''(0)$. Por lo tanto, en $x = 0$ existen derivadas hasta el segundo orden.

(b) Integrando por partes:

$$f(1) = \int_0^1 t^2 \ln t \, dt = \left(\begin{array}{l} u = \ln t \\ dv = t^2 \, dt \end{array} \right) = \left[\frac{t^3}{3} \ln t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^3}{3} \frac{dt}{t} = - \left[\frac{t^3}{9} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{-1}{9}$$

donde la función $g(t) = t^3 \ln t$ se considera definida en $t = 0$ por el valor de su límite: $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$. Además, sustituyendo en las derivadas correspondientes, se tiene que $f'(1) = 0$, $f''(1) = 1$ y $f'''(1) = 3$. Luego el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 1$, y el término complementario, son:

$$\begin{aligned} P_3^1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \frac{-1}{9} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} \\ T_3^1(x) &= \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}(x-1)^4 = \frac{(x-1)^4}{12\xi} \text{ , con } \xi \in (x, 1) \text{ o } \xi \in (1, x) \end{aligned}$$

Luego:

$$f(1/2) \simeq P_3^1(1/2) = \frac{-1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{-7}{144} \simeq -0,04861\dots$$

con un error:

$$\text{error} = |T_3^1(1/2)| = \frac{(\frac{1}{2} - 1)^4}{12\xi} = \frac{1}{12 \cdot 2^4 \cdot \xi} \leq \frac{1}{12 \cdot 2^3} = \frac{1}{96} < 0,01042$$

ya que $\frac{1}{2} < \xi < 1$.

Problema 5 Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1},$$

se pide:

- (a) Calcula el área de la región acotada limitada por sus dos gráficas.
- (b) Calcula el área de la región no acotada situada entre las dos gráficas en el semiplano $x > 0$.

Solución: Resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, se obtiene:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1} \iff x^2 - 2x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- (a) La región acotada limitada por las gráficas es:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

y su área es:

$$\begin{aligned} \text{área}(A) &= \int_0^2 \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^2 \left[\left(1 - \frac{2}{2x + 1} \right) - \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{2x + 1} \right) dx = [2 \arctan x - \ln |2x + 1|]_{x=0}^{x=2} \\ &= 2 \arctan 2 - \ln 5 \end{aligned}$$

- (b) La región no acotada, del semiplano $x > 0$, limitada por las gráficas es:

$$B = \{(x, y) : 2 \leq x < +\infty, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

y su área es:

$$\begin{aligned} \text{área}(B) &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1} \right) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_2^r \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} [\ln |2x + 1| - 2 \arctan x]_{x=2}^{x=r} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} [\ln |2r + 1| - 2 \arctan r - \ln 5 + 2 \arctan 2] = +\infty \end{aligned}$$