

Cálculo Infinitesimal (Grupo 17T)

Primer Parcial
31 de Enero de 2001

Tiempo 2:30h.
2 + 2 + 2 + 2 + 2

1. (a) Justifica que la ecuación $x^5 + x^3 + 5 = 0$ tiene al menos una solución real, y encuentra un intervalo de longitud uno que la contenga.
- (b) Enuncia el teorema de Bolzano, y estudia si se puede aplicar para afirmar que la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$$

se anula en algún punto del intervalo $(0, 2)$.

2. (a) Clasifica las discontinuidades y determina las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$f(x) = \frac{1}{x - xe^{(x+2)/(x-1)}}$$

- (b) Sin hacer cálculos adicionales, esboza su gráfica.

3. (a) Dada la función

$$f(x) = \frac{x - a}{1 - e^{x-a}}$$

con $a \in \mathbb{R}$, ¿cómo se debe definir en $x = a$ para que sea continua y derivable en todo \mathbb{R} ? Calcula $f'(a)$.

- (b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + xy^2 + y^3 + 3 = 0$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

4. (a) Estudia hasta qué orden existen las derivadas en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{ si } x \leq 0 \\ \int_0^x t^2 \ln t \, dt & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- (b) Usando el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 1$, aproxima el valor de la función en $x = 1/2$ y acota el error cometido.

5. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1},$$

se pide:

- (a) Calcula el área de la región acotada limitada por sus dos gráficas.
- (b) Calcula el área de la región no acotada situada entre las dos gráficas en el semiplano $x > 0$.