

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

- (a) Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales, y  $f : V \rightarrow W$  una aplicación lineal. Demuestra que el conjunto  $\text{Ker } f$  es un subespacio vectorial de  $V$ .
- (b) En el espacio vectorial  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$  se considera el subespacio vectorial  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Encuentra un subespacio vectorial  $W$  tal que  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = V \oplus W$ .

Solución:

- (a) Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } f$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de donde  $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \text{Ker } f$ . Luego  $\text{Ker } f$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

- (b) Una base de  $V$  es

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$$

siendo ésta última expresión respecto de la base usual de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Extendiendo esta base con los vectores (matrices):

$$\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

se obtiene una base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Luego

$$W = \mathcal{L} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

es un subespacio vectorial que verifica:  $V \oplus W = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

Ejercicio 2. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un homomorfismo que verifica:

$$\text{Ker } f = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (2, 1, 2), (0, 1, 0)\})$$

$$\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0, x + z + t = 0, z + t = 0\}$$

- (a) Halla una base del  $\text{Ker } f$ , y extiéndela a una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Halla una base de  $\text{Im } f$ , y extiéndela a una base  $B'$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- (c) Halla la matriz de  $f$  respecto de las bases  $B$  y  $B'$ .

(d) Halla su matriz de  $f$  respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ .

**Solución:**

(a) Usando operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene una base del  $\text{Ker } f$ ,  $B_{\text{Ker } f} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ , que se completa con el vector  $(0, 0, 1)$  para formar una base de  $\mathbb{R}^3$ :

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

(b) Las ecuaciones paramétricas de  $\text{Im } f$  son:

$$\begin{cases} x + 2t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \implies x = z = t = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Luego una base de  $\text{Im } f$  es  $B_{\text{Im } f} = \{(0, 1, 0, 0)\}$ , que se puede extender hasta formar la base de  $\mathbb{R}^4$ :

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} = B'_c$$

que es la base canónica.

(c) La matriz de  $f$  respecto de las bases  $B$  y  $B'$  es

$$M(f, B, B') = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

(d) Teniendo en cuenta que  $B' = B'_c$ , que la matriz del cambio de base en  $\mathbb{R}^3$  de  $B$  a  $B_c$  es

$$M(B, B_c) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^4)^{B'} \\ \uparrow P^{-1} & & \downarrow I \\ (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^4)^{B'_c} \end{array}$$

la matriz de  $f$  respecto de las bases canónicas es:

$$M(f, B_c, B'_c) = C = IAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo definido, respecto de la base canónica, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla los autovalores de  $f$  y los subespacios propios asociados.  
 (b) Estudia si  $f$  es diagonalizable y, en caso afirmativo, halla una base en la que su matriz sea diagonal.  
 (c) Halla  $A^{198}$ .

**Solución:**

(a) El polinomio característico es

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

luego los autovalores de  $f$  son  $\lambda = -1$ , de multiplicidad 2, y  $\lambda = 1$ , de multiplicidad 1. Los subespacios propios son:

$$\begin{aligned} S(-1) &= \{\mathbf{v} : (A + I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \{(x, y, z) : x + y - z = 0\} = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) \\ S(1) &= \{\mathbf{v} : (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1, 1, 1)\}) \end{aligned}$$

(b) Sí, es diagonalizable porque todos los autovalores son reales y la dimensión de los subespacios propios coincide con la multiplicidad de los autovalores correspondientes. Respecto de la base

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

la matriz es diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Puesto que  $A = PDP^{-1}$ , se cumple que:

$$A^{198} = PD^{198}P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^{198} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{198} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{198} \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

#### Ejercicio 4.

(a) En  $\mathbb{R}^3$ , dado el plano  $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$ , encuentra las ecuaciones de la simetría  $S_{\pi_2}$  respecto de  $\pi_2$ .

(b) Sea  $S_{\pi_1}$  la simetría respecto del plano  $\pi_1 \equiv z = 1$ , cuya ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Halla las ecuaciones del movimiento  $M = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}$ , demuestra que es un giro y encuentra su eje.

#### Solución:

(a) La matriz de la simetría respecto del plano  $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$  en la base  $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)\}$ , formada por dos vectores paralelos a  $\pi_2$  ( $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ ) y otro ortogonal ( $\mathbf{v}_3$ ), y en la base canónica son:

$$M(S_{\pi_2}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$M(S_{\pi_2}, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

La simetría respecto del plano  $\pi_2$  será  $S_{\pi_2}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$  manteniendo fijos los puntos del plano, por ejemplo  $(1, 1, 0)$ , luego:

$$S_{\pi_2}(1, 1, 0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$S_{\pi_2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Las ecuaciones del movimiento  $M = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}$  son

$$M(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

El conjunto de vectores invariantes por este movimiento es

$$M(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

que corresponde a una recta, luego el movimiento es un giro y éste es el eje de giro.